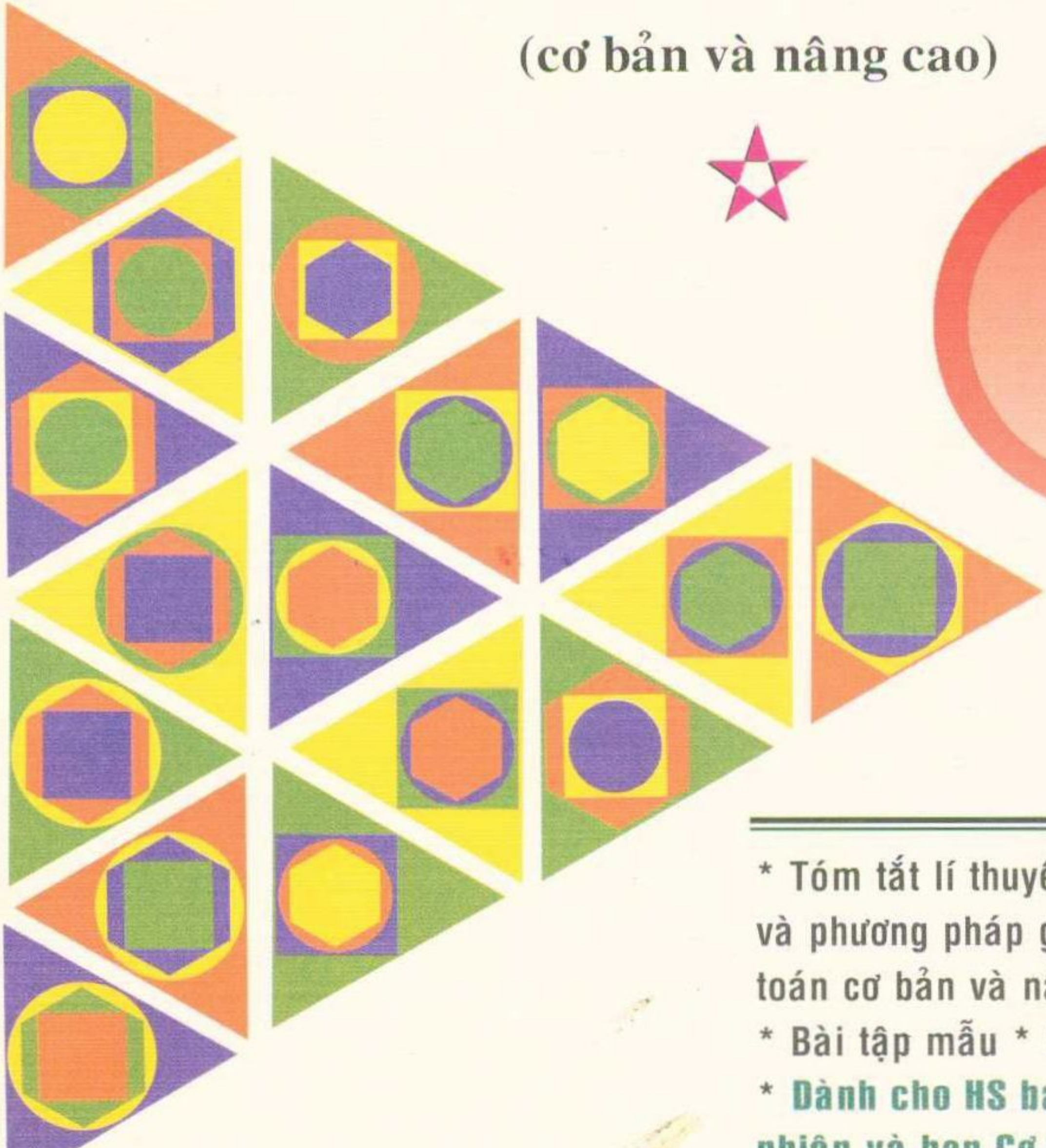
Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

Phân loại và phương pháp giải các dạng bài tập Toán

(cơ bản và nâng cao)

11



* Tóm tắt lí thuyết * Phân loại và phương pháp giải các dạng toán cơ bản và nâng cao
* Bài tập mẫu * Bài tập áp dụng
* **Dành cho HS ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ bản**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

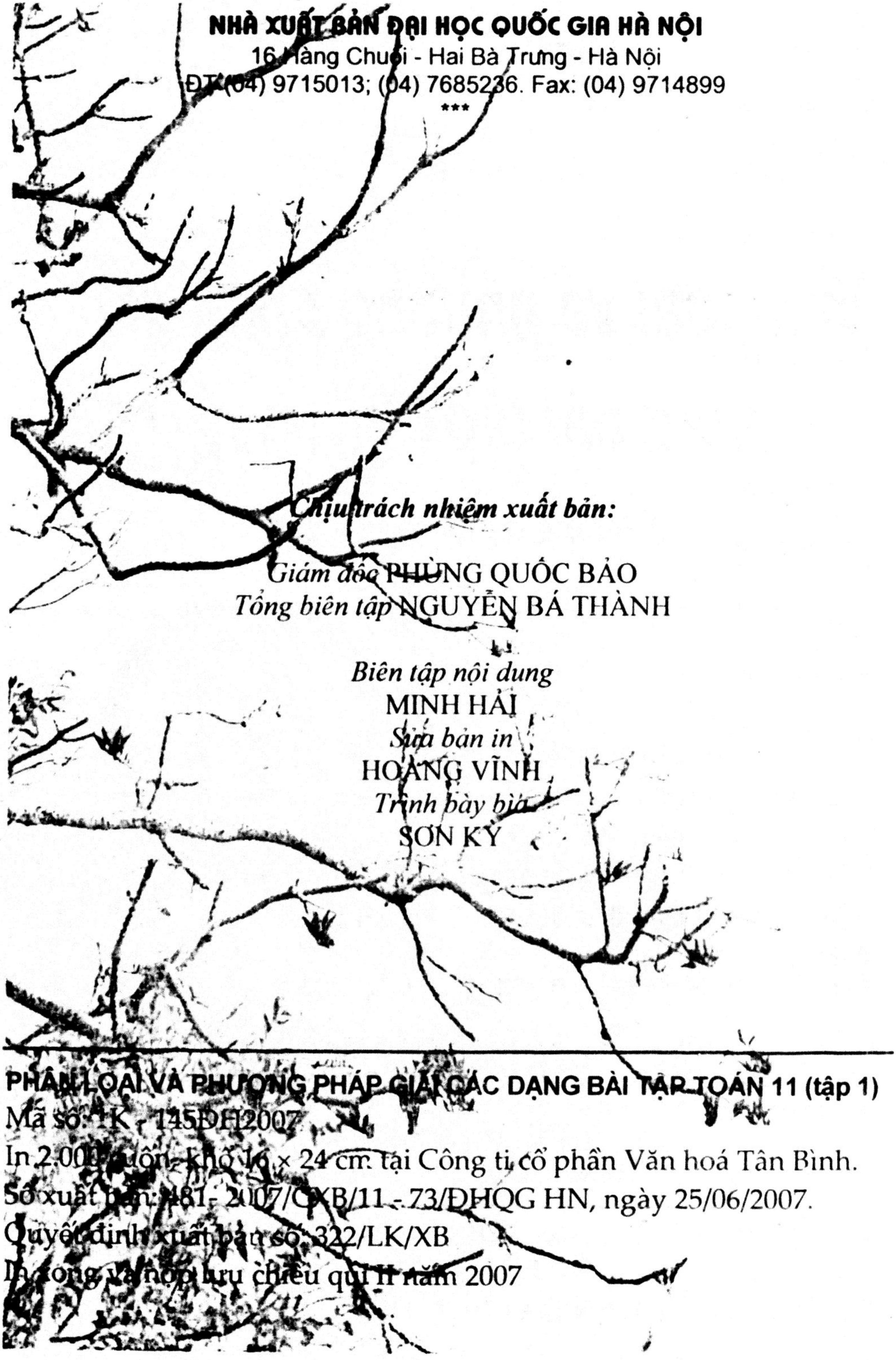
Phân loại và phương pháp giải các dạng bài tập Toán

(Chương trình nâng cao)

11

* Tóm tắt lí thuyết * Phân loại và phương pháp giải các dạng toán cơ bản và nâng cao
* Bài tập mẫu * Bài tập áp dụng
* Dành cho HS ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ sở

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT: (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập nội dung
MINH HẢI
Sửa bản in
HOÀNG VĨNH
Trình bày bìa
SƠN KỲ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN 11 (tập 1)
Mã số: 1K - 145ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24 cm tại Công ti cổ phần Văn hoá Tân Bình.
Số xuất bản: 481 - 2007/CXB/11 - 73/ĐHQG HN, ngày 25/06/2007.
Quyết định xuất bản số: 322/LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quí II năm 2007

LỜI GIỚI THIỆU

Xin giới thiệu đến bạn đọc cuốn: *Phân loại & Phương pháp giải các ạng bài tập Toán 11*, theo chương trình phân ban mới của bộ GD&ĐT.

Sách gồm 2 tập: - Tập 1: Đại số & giải tích

- Tập 2: Hình học

Nội dung sách bám sát theo sách giáo khoa mới, chương trình huẩn và chương trình nâng cao. Nội dung mỗi bài gồm các phần sau:

A. Kiến thức cơ bản

B. Phân loại và phương pháp giải các dạng toán

- Bài tập tự luận
- Bài tập trắc nghiệm khách quan

Các bài tập trình bày trong các tập sách này được các tác giả chọn ọc kĩ lưỡng, có tính điển hình và khai thác tốt các góc cạnh của mỗi hần kiến thức. Với các lời giải rõ ràng, dễ hiểu sẽ giúp các em học sinh iếp cận và rèn luyện tốt các kĩ năng và phương pháp giải toán, đồng hời ôn tập các kiến thức đã được học qua các bài tập trắc nghiệm khách uan để chuẩn bị tốt cho các kì thi học kì, thi tốt nghiệp, tuyển sinh bằng hương pháp trắc nghiệm khách quan theo quy định của bộ GD&ĐT.

Hi vọng rằng các tập sách này sẽ là người bạn đồng hành giúp các m học sinh ngày càng yêu thích hơn môn Toán và vững vàng giải quyết ác vấn đề trước các kì thi sắp đến.

Do thời gian biên soạn có hạn, có thể sách còn những khiếm huyết. Rất mong nhận được những góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp à các em học sinh để trong lần tái bản sau, bộ sách sẽ hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gởi về: Trung tâm sách Giáo dục Alpha - 225C Nguyễn Tri Phương - Phường 9 - Q.5 - Tp.HCM. ĐT: 8107718 - 8547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Các tác giả

MỤC LỤC

Chương I: Hàm số lượng giác - phương trình lượng giác

§1. Hàm số lượng giác 5
§2. Phương trình lượng giác cơ bản 13
§3. Một số phương trình lượng giác thường gặp 21
Ôn tập chương I 35

Chương II: Tổ hợp và xác suất

§1. Hai quy tắc đếm cơ bản 54
§2. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp 59
§3. Nhị thức Newton 77
§4. Biến cố và xác xuất của biến cố 89
§5. Xác xuất điều kiện - biến cố độc lập 100
§6. Biến ngẫu nhiên - các đặc trưng của nó 108
Ôn tập chương II 117

Chương III: Dãy - Cấp số cộng và cấp số nhân

§1. Phương pháp quy nạp toán học 160
§2. Dãy số 162
§3. Cấp số cộng 169
§4. Cấp số nhân 173

Chương IV: Giới hạn

§1. Giới hạn của dãy số 187
§2. Giới hạn của hàm số 199
§3. Hàm số liên tục 217
Ôn tập chương IV 226

Chương V: Đạo hàm

§1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm 249
§2. Các quy tắc tính đạo hàm 258
§3. Đạo hàm của các hàm lượng giác 267
§4. Vi phân 272
§5. Đạo hàm cấp cao 276
Ôn tập chương V 283

Chương I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1.Hàm số sin và hàm số cosin:

sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cosin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

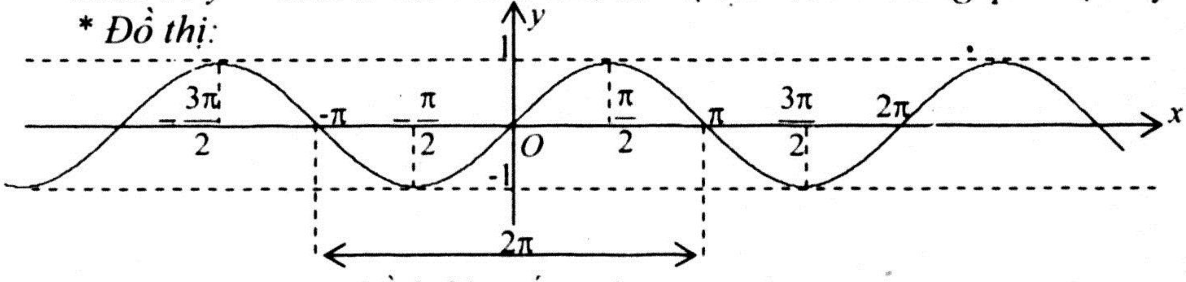
$x \mapsto y = \sin x$ $x \mapsto y = \cos x$

* *Tập xác định của hai hàm số này là* $\mathbb{R}$.

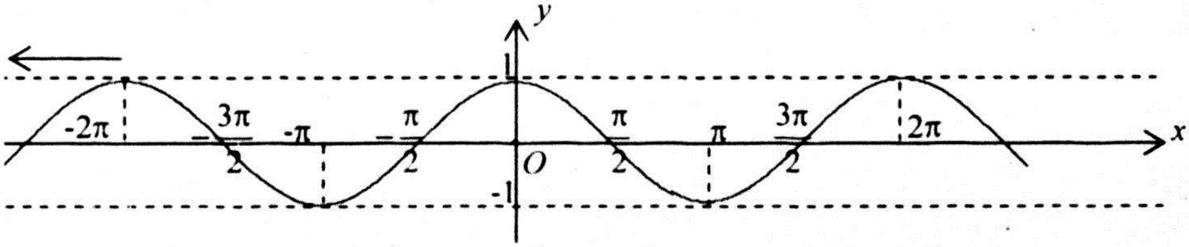
* *Với mọi* $x \in \mathbb{R}$: $-1 \le \sin x \le 1$; $-1 \le \cos x \le 1$.

* *Hàm số* $y = \sin x$ *là hàm số lẻ, đồ thị của nó đối xứng qua gốc tọa độ.* *Hàm số* $y = \cos x$ *là hàm số chẵn, đồ thị của nó đối xứng qua trục Oy.*

* *Đồ thị:*



Đồ thị hàm số $y = \sin x$



Đồ thị hàm số $y = \cos x$

* *Cả hai hàm số này đều là hàm tuần hoàn với chu kì* 2π.

* *Đồ thị hàm số* $y = \cos x$ *được suy ra từ đồ thị hàm số* $y = \sin x$ *qua phép tịnh tiến song song với trục hoành về bên trái một đoạn* $\frac{\pi}{2}$.

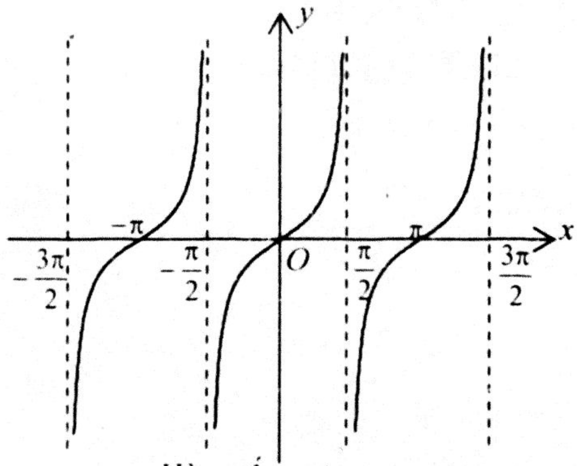
2. Hàm số tang và hàm số cotang:

* *Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức:* $y = \tan x$, *tập xác định* $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

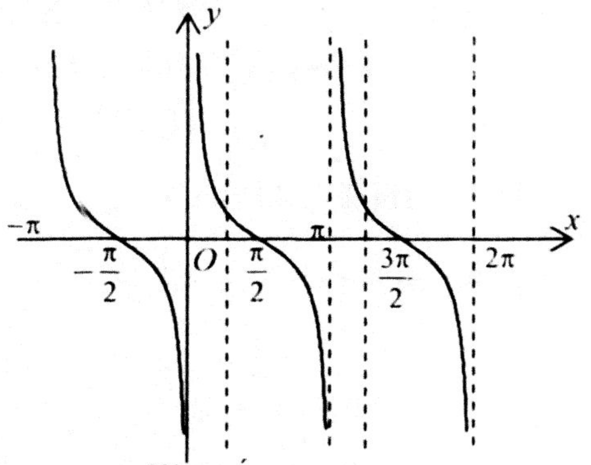
* *Hàm số cotang là hàm số được xác định bởi công thức:* $y = \cot x$, *với tập xác định* $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- *Đồ thị:*

* *Hàm số* $y = \tan x$ *và* $y = \cot x$ *là những hàm số lẻ và tuần hoàn với chu kì* π.



Hàm số $y = \tan x$



Hàm số $y = \cot x$

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Tìm tập xác định của hàm số.***

Phương pháp: *Tìm điều kiện của biến số x để hàm số xác định. Chú ý đến tập xác định của các hàm số lượng giác.*

Thí dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$; **b)** $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}}$;

c) $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$; **d)** $y = \cot\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$.

Giải:

a) $y = \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$ xác định khi $\cos x \neq 0$ hay $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $y = \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}}$ xác định khi $\begin{cases} 1-\cos x \geq 0 \\ \sin^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) $y = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$ xác định khi $\dfrac{\pi}{4} + x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) $y = \cot\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right)$ xác định khi $\dfrac{\pi}{3} - 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Dạng 2: ***Hàm số chẵn, hàm số lẻ.***

Phương pháp: *Để xác định hàm số y = f(x) là hàm chẵn hay lẻ, ta làm như sau:*

- *Xác định tập xác định D của hàm số y = f(x).*
- *Với x bất kì: $x \in D$, ta chứng minh $-x \in D$.*
- *Tính f(–x):*

  + Nếu f(–x) = f(x), $\forall x \in D$ thì hàm số y = f(x) là hàm số chẵn.

+ Nếu $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

*+ Nếu có $x \in D$: * $f(-x) \neq f(x)$ thì hàm số $y = f(x)$ không là hàm s chẵn.*

** $f(-x) \neq -f(x)$ thì hàm số $y = f(x)$ không là hàm số lẻ.*

Thí dụ 1. **Khảo sát tính chẵn lẻ của các hàm số sau:**

a) $y = \tan x + 2\sin x$; **b) $y = \cos x + \sin^2 x$;**

c) $y = \sin 2x.\cos 3x$; **d) $y = \sin x + \cos x$.**

Giải

a) $y = f(x) = \tan x + 2\sin x$.

* Tập xác định: $D = \{ x / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \}$.

* Với x bất kì: $x \in D$, ta cũng có $-x \in D$.

* Ta có: $f(-x) = \tan(-x) + 2\sin(-x) = -\tan x - 2\sin x = -(\tan x + 2\sin x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

Vậy $y = \tan x + 2\sin x$ là hàm số lẻ.

b) $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Với x bất kì: $x \in D$, ta cũng có $-x \in D$.

* Ta có: $f(-x) = \cos(-x) + \sin2(-x) = \cos x + (-\sin x)2 = \cos x + \sin2x = f(x)$, $\forall x \in D$.

Vậy $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

c) $y = f(x) = \sin 2x.\cos 3x$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Với x bất kì: $x \in D$, ta cũng có $-x \in D$.

* Ta có: $f(-x) = \sin(-2x)\cos(-3x) = -\sin 2x.\cos 3x = -f(x), \forall x \in D$.

Vậy $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số lẻ.

d) $y = f(x) = \sin x + \cos x$

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

* Với x bất kì: $x \in D$, ta cũng có $-x \in D$.

* Ta có: $\frac{\pi}{4} \in D : f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2};\ f(-\frac{\pi}{4}) = 0$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right); f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Vậy $y = \sin x + \cos x$ không là hàm số chẵn và không là hàm số lẻ.

Chú ý: Để chứng tỏ hàm số $y = f(x)$ không chẵn (không lẻ) thì cần chỉ ra có $x \in D$:

$$f(-x) \neq f(x)\ (f(-x) \neq -f(x)).$$

Dạng 3: *Hàm số tuần hoàn và xác định chu kì tuần hoàn.*

Phương pháp: *Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.*

- *Để chứng minh $y = f(x)$ tuần hoàn cần chứng minh: có $T \in \mathbb{R}$ sao cho:*
  1) $x + T \in D$; $x - T \in D$, $\forall x \in D$.
  2) $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D$.
- *Giả sử hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn, để tìm chu kì tuần hoàn ta cần tìm số dương T nhỏ nhất thoả mãn 2 tính chất 1) và 2) ở trên.*

Thí dụ 1. Chứng minh hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π.

Giải:

Hàm số $y = f(x) = \sin 2x$.

* Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $x + \pi \in D$, $x - \pi \in D$, $\forall x \in D$.

* Ta có: $f(x + \pi) = \sin[2(x + \pi)] = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x = f(x)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số tuần hoàn.

* Giả sử có a: $0 < a < \pi$ sao cho: $f(x + a) = f(x), \forall x \in D$ tức là:

$$\sin[2(x + a)] = \sin 2x, \forall x \in D.$$

Chọn $x = 0$, ta có: $\sin 2a = 0 \Rightarrow 2a = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$.

Do $0 < a < \pi$ nên $0 < \frac{k\pi}{2} < \pi \Rightarrow 0 < k\pi < 2\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = 1$ hay $a = \frac{\pi}{2}$.

Thử lại: $\sin[2(x + \frac{\pi}{2})] = \sin 2x \Rightarrow \sin(2x + \pi) = \sin 2x$ không đúng với $\forall x \in D$, chẳng hạn: khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $\sin(2.\frac{\pi}{4} + \pi) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ còn $\sin(2.\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Vì vậy $a = \frac{\pi}{2}$ không phải là chu kì của hàm số.

Vậy chu kì của hàm số $y = \sin 2x$ là π.

Thí dụ 2. Chứng minh hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì tuần hoàn của nó.

Giải:

Hàm số $y = f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

* Tập xác định: $2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$.

$D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})\}$.

* Ta có: $x + \frac{\pi}{2} \in D$, $x - \frac{\pi}{2} \in D$, $\forall x \in D$;

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = \tan\left(2(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left((2x + \frac{\pi}{4}) + \pi\right) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

⇒ Hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn.

* Giả sử có a: $0 < a < \frac{\pi}{2}$ sao cho: $f(x + a) = f(x)$, $\forall x \in D$ tức là:

$$\tan\left(2(x + a) + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \tan\left(2x + 2a + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$\forall x \in D$.

Chọn $x = -\frac{\pi}{8}$, ta có: $\tan 2a = 0 \Rightarrow 2a = k\pi \Rightarrow a = \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Do $0 < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < k < 1 \Rightarrow$ Không có k vì $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy chu kì tuần hoàn của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ là $\frac{\pi}{2}$.

Nhận xét: Để chứng minh số dương T là chu kì tuần hoàn của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$ có tập xác định D, ta cần chứng minh:

1) $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in D$.

2) Giả sử có số a: $0 < a < T$ sao cho: $f(x + a) = f(x)$, $\forall x \in D$. Chọn giá trị $x = x_0$ thích hợp sao cho $f(x_0 + a) = f(a)$ và từ $f(a) = f(x_0)$ tìm ra mâu thuẫn nào đó để chứng tỏ rằng không có số a như trên.

Dạng 4: *Vẽ đồ thị hàm số, xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến.*

Phương pháp: ** Vẽ đồ thị hàm số.*

** Dựa vào đồ thị vừa vẽ để xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến.*

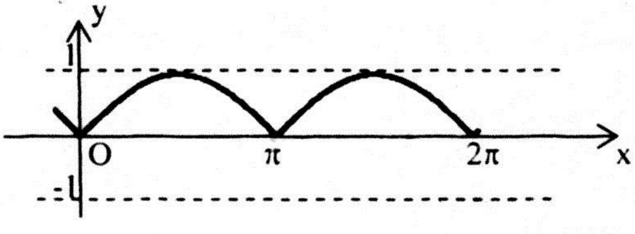
Thí dụ 1. a) Dựa vào đồ thị hàm số y = sinx hãy vẽ đồ thị hàm số y = |sinx| trên đoạn [0; 2π].

b) Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số y = |sinx| trên đoạn [0; 2π].

Giải:

a) Ta có:

$$y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x; & 0 \le \sin x \le 1 \\ -\sin x; & -1 \le \sin x < 0 \end{cases}$$



Vì $x \in [0; 2\pi]$ nên $y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x; & 0 \le x \le \pi \\ -\sin x; & \pi < x \le 2\pi \end{cases}$

Từ đó: đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$ trên $[0; 2\pi]$ được suy ra từ đồ thị $y =$ $\sin x$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị trong $[0; \pi]$ và lấy đối xứng phần đ thị trong $(\pi; 2\pi]$ qua trục hoành (phần tô đậm ở hình bên).

b) Nhìn vào đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ trên $[0; 2\pi]$ vừa vẽ, ta có:

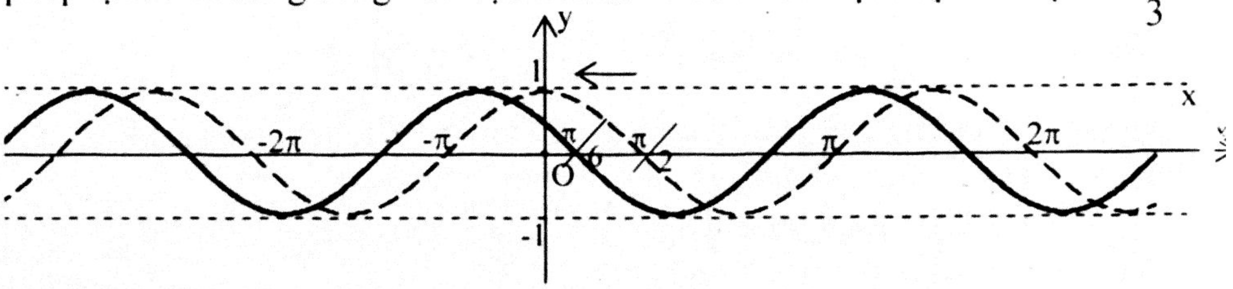
Hàm số đồng biến khi $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \cup (\pi; \frac{3\pi}{2})$.

Hàm số nghịch biến khi $x \in (\frac{\pi}{2}; \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}; \pi)$.

Thí dụ 2. **Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$ hãy vẽ đồ thị hàm số $y =$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.**

Giải:

Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ qu phép tịnh tiến song song với trục hoành về bên trái một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{3}$.



Chú ý: Giả sử ta đã có đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, khi đó:

* Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ bao gồm những phần nằm trên trục hoành cu (C) và các phần đối xứng qua trục hoành của những phần nằm phía dưới trụ hoành của (C) (Xem Thí dụ 1 – Dạng 4).

* Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ bao gồm phần nằm bên phải trục tung của (C và phần đối xứng qua trục tung của phần đồ thị đó.

* Đồ thị hàm số $y = -f(x)$ là đối xứng qua trục hoành của (C).

– Với $a > 0$:

* Đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ được suy ra từ (C) qua phép tịnh tiến son song với trục hoành về bên trái một đoạn có độ dài a (Xem Thí dụ 2 – Dạn 4).

* Đồ thị hàm số $y = f(x - a)$ được suy ra từ (C) qua phép tịnh tiến son song với trục hoành về bên phải một đoạn có độ dài a.

Dạng 5: ***Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.***

Phương pháp: *Cần chú ý rằng:* $-1 \le \sin x \le 1$; $-1 \le \cos x \le 1$.

Thí dụ 1. **Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của các hàm số:** **a)** $y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$; **b)** $y = \sqrt{1+\cos 2x} - 5$.

Giải:

a) Ta có: $-1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1 \Rightarrow -3 \le 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 3 \Rightarrow -2 \le 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1 \le 4$

Vậy GTLN của y là 4 khi $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

GTNN của y là -2 khi $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có: $-1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 + \cos 2x \le 2 \Rightarrow 0 \le \sqrt{1+\cos 2x} \le \sqrt{2}$

$$\Rightarrow -5 \le \sqrt{1+\cos 2x} - 5 \le \sqrt{2} - 5.$$

Vậy GTLN của y là $\sqrt{2} - 5$ khi $\cos 2x = 1 \Rightarrow 2x = k2\pi \Rightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

GTNN của y là -5 khi $\cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = \pi + k2\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

C – BÀI TẬP.

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1 - 2\sin x}{\cos 2x + 1}$; b) $y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $y = \frac{\tan 2x - 1}{\sqrt{1+\sin x} + 1}$; d) $y = \sqrt{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{2}}$;

e) $y = \frac{3\cos 4x - 3}{\sqrt{2 - 2\cos x} - 2}$; f) $y = \frac{1 - \cot 3x}{1 - \sqrt{1+\sin 3x}}$;

g) $y = \tan 2x + \cot x$.

Bài 2. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin x + 3\cot 2x$; b) $y = \frac{\cos 2x}{2 + \tan^2 3x}$;

c) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; d) $y = \tan 5x.\cot 7x$;

e) $y = \cos 3x + \cot 2x$; f) $y = \cos 3x.\cot 2x$.

Bài 3. Chứng minh các hàm số sau tuần hoàn với chu kì T (đã cho):

a) $y = \sin 3x$, $T = \frac{2\pi}{3}$; b) $y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{7}\right)$, $T = 4\pi$;

c) $y = \tan\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$, $T = \frac{\pi}{5}$; d) $y = |\cos 2x|$, $T = \frac{\pi}{2}$;

e) $y = |\cos x| + |\sin x|$; $T = \pi$.

Bài 4. Tìm chu kì tuần hoàn của các hàm số sau:

a) $y = \tan 3x$; b) $\cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $y = \left|\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$; d) $y = |\tan 2x| + |\sin 2x|$.

Bài 5. Vẽ đồ thị (dựa vào đồ thị của các hàm số lượng giác đã học) và xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số:

a) $y = -\tan x$; b) $y = \cos(|x|)$;

c) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; d) $y = |\cot x|$.

Bài 6. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số:

a) $y = 4 + 5\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; b) $y = 2 - \sqrt{4 + 2\sin 5x}$;

c) $y = \frac{3}{\cot^2 x + 1} + 1$; d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. *Phương trình* sin*x* = *a*:

* *Nếu* $|a| > 1$: *Phương trình vô nghiệm.*

* *Nếu* $|a| \le 1$: *Đặt* $a = \sin\varphi$, *phương trình có nghiệm:*

$$\boxed{\begin{array}{ll} & x = \varphi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \textit{hoặc} & x = \pi - \varphi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{array}}$$

Nếu φ *thoả mãn điều kiện* $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ *và* $a = \sin\varphi$ *thì nghiệm phương trình có thể được viết là:*

$$\boxed{\begin{array}{ll} & x = \mathrm{acrsin}\,a + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ \textit{hoặc} & x = \pi - \mathrm{acrsin}\,a + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array}}$$

Chú ý: * *Nếu số đo của* φ *được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:*

$$x = \varphi + k360^\circ \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textit{hoặc} \quad x = 180^\circ - \varphi + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* *Tổng quát, với f(x) và g(x) là 2 biểu thức của x, ta có:*

$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. *Phương trình* cos*x* = *a*:

* *Nếu* $|a| > 1$: *Phương trình vô nghiệm.*

* *Nếu* $|a| \le 1$: *Đặt* $a = \cos\varphi$, *phương trình có nghiệm:*

$$\boxed{x = \pm\varphi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).}$$

Nếu φ *thoả mãn điều kiện* $0 \le \varphi \le \pi$ *và* $a = \cos\varphi$ *thì nghiệm phương trình có thể được viết là:* $\boxed{x = \pm\,\mathrm{acrcos}\,a + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).}$

Chú ý: * *Nếu số đo của* φ *được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:* $\boxed{x = \pm\varphi + k360^\circ \ (k \in \mathbb{Z}).}$

* *Tổng quát, với f(x) và g(x) là 2 biểu thức của x, ta có:*

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

3. *Phương trình* tan*x* = *a*: *Đặt* $a = \tan\varphi$, *phương trình có nghiệm:*

$$\boxed{x = \varphi + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).}$$

Nếu φ *thoả mãn điều kiện* $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ *và* $a = \tan\varphi$ *thì nghiệm phương trình có thể được viết là:* $\boxed{x = \mathrm{acrtan}\,a + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).}$

Chú ý: ** Nếu số đo của φ được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:*

$$x = \varphi + k180^\circ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

** Tổng quát, với $f(x)$ và $g(x)$ là 2 biểu thức của x, ta có:*

$$\tan[f(x)] = \tan[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Phương trình* cotx = *a: *Đặt a = cotφ, phương trình có nghiệm:*

$$\boxed{x = \varphi + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).}$$

Nếu φ thoả mãn điều kiện $0 < \varphi < \pi$ và a = cotφ thì nghiệm phương trình có thể được viết là: $\boxed{x = \text{acrcot}a + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).}$

Chú ý: ** Nếu số đo của φ được cho bằng độ thì nghiệm của phương trình có dạng:*

$$x = \varphi + k180^\circ \ (k \in \mathbb{Z}).$$

** Tổng quát, với $f(x)$ và $g(x)$ là 2 biểu thức của x, ta có:*

$$\cot[f(x)] = \cot[g(x)] \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: *Giải phương trình lượng giác cơ bản.*

Phương pháp: *Dùng công thức nghiệm tương ứng với mỗi phương trình.*

Thí dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sin 3x = \dfrac{1}{2}$; **b)** $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\tan(x + 60^\circ) = -\sqrt{3}$; **d)** $\cot\left(\dfrac{\pi}{7} - 5x\right) = \dfrac{1}{3}$.

Giải:

a) $\sin 3x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{18} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\cos 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{8} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\tan(x + 60^\circ) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan(x + 60^\circ) = -\tan 60^\circ = \tan(-60^\circ)$

$\Leftrightarrow x + 60^\circ = -60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = -120^\circ + k180^\circ \ (k \in \mathbb{Z})$.

d) $\cot\left(\frac{\pi}{7} - 5x\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{7} - 5x = \operatorname{arccot}\frac{1}{3} + k\pi \Leftrightarrow -5x = \operatorname{arccot}\frac{1}{3} - \frac{\pi}{7} + k\pi$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\operatorname{arccot}\frac{1}{3}}{5} + \frac{\pi}{35} + \frac{k\pi}{5} (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý: Ta nhắc lại các công thức:

$-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$; $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$; $-\tan\alpha = \tan(-\alpha)$; $-\cot\alpha = \cot(-\alpha)$.

Thí dụ 2: Giải các phương trình:

a) $\sin 2x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$; **b)** $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$;

c) $\cos(3x + 20^\circ) = \sin(40^\circ - x)$; **d)** $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Giải:

a) $\sin 2x = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 3x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - 3x + k\pi$

$\Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow 5x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{30} + \frac{k\pi}{5} \ (k \in \mathbb{Z})$.

c) $\cos(3x + 20^\circ) = \sin(40^\circ - x) \Leftrightarrow \cos(3x + 20^\circ) = \cos[90^\circ - (40^\circ - x)]$

$\Leftrightarrow \cos(3x + 20^\circ) = \cos(50^\circ + x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 20^\circ = 50^\circ + x + k360^\circ \\ 3x + 20^\circ = -50^\circ - x + k360^\circ \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 30^\circ + k360^\circ \\ 4x = -70^\circ + k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 15^\circ + k180^\circ \\ x = -17{,}5^\circ + k90^\circ \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left[-\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\Leftrightarrow \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2x+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$$

$(k\in\mathbb{Z})$.

Chú ý: Ta nhắc lại các công thức:

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\ \tan\alpha=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);$$

$$\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Dạng 2: ***Giải một số dạng phương trình lượng giác đưa về phương trình cơ bản.***

Phương pháp: *Dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình đã cho về phương trình cơ bản.*

Thí dụ 1: Giải các phương trình:

a) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$; **b)** $\cos^2 3x=1$;

c) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$; **d)** $\sin x+\cos x=1$.

Giải:

a) $\sin^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin^2 x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow \left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}=0\\ \sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2} & (1)\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\pi-(-\frac{\pi}{4})+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Giải (2): $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết hợp các nghiệm của (1) và (2) ta có phương trình đã cho có nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Thí dụ 2: **Giải các phương trình:**

a) cosx.cos3x = cos5x.cos7x; **b) sin3x.cos7x = sin13x. cos17x;**

c) cos2x.cos5x = cos7x; **d) sin4x.sin3x = cosx.**

Giải:

a) $\cos x.\cos 3x = \cos 5x.\cos 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 12x)$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x = \cos 12x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 12x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 12x + k2\pi \\ 4x = -12x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -8x = k2\pi \\ 16x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{k\pi}{8} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\sin 3x.\cos 7x = \sin 13x.\ \cos 17x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-\sin 4x+\sin 10x)=\frac{1}{2}(-\sin 4x+\sin 30x)$

$$\Leftrightarrow \sin 10x = \sin 30x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x = 30x + k2\pi \\ 10x = \pi - 30x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{10} \\ x = \dfrac{\pi}{40} + \dfrac{k\pi}{20} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\cos 2x.\cos 5x = \cos 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x+\cos 7x)=\cos 7x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x=\frac{1}{2}\cos 7x$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos 7x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 7x + k2\pi \\ 3x = -7x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{5} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $\sin 4x.\sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x) = \cos x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cos 7x = \frac{1}{2}\cos x$

$\Leftrightarrow -\cos 7x = \cos x \Leftrightarrow \cos(\pi - 7x) = \cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi - 7x = x + k2\pi \\ \pi - 7x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: Công thức biến đổi tích thành tổng:

$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$; $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$;

$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$.

Thí dụ 3: Giải các phương trình:

a) $1 + 2\cos x + \cos 2x = 0$; **b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;**

c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$; **d) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.**

Giải:

a) $1 + 2\cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{5x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{3x}{2} = -\cos\dfrac{x}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{5x}{2} = 0 \\ \cos\dfrac{3x}{2} = \cos(\pi - \dfrac{x}{\pi}) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5x}{2} = k\pi \\ \dfrac{3x}{2} = \pi - \dfrac{x}{2} + k2\pi \\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{x}{2} - \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

d) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x \Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{1 - \cos 6x}{2}$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow (1 - \cos 4x) + (\cos 6x - \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 2\sin 2x.\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin 2x + \sin 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = -\sin 4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = k\pi \\ 2x = -4x + k2\pi \\ 2x = \pi + 4x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{k\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý: * Công thức biến đổi tổng thành tích:

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$; $\quad \cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$;

$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$; $\quad \sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

* Công thức nhân đôi: $\sin 2x = 2\sin x.\cos x$;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.

C – BÀI TẬP.

Bài 1: Giải các phương trình:

a) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;　　b) $\cos(2x + 25^o) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

c) $\tan(x + \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;　　d) $\cot(4x + 2) = -\sqrt{3}$;

e) $\sin(2x - 10^o) = \frac{1}{2}$ với $-120^o < x < 90^o$;

f) $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ với $-\pi < x < \pi$;

Bài 2: Giải các phương trình:

a) $\sin(2x - 3) = \sin(x + 1)$;　　b) $\sin 3x = \cos 4x$;

c) $\tan(3x + 2) + \cot 2x = 0$;　　d) $\sin 5x + \cos 4x = 0$;

e) $\sin(2x + 50^o) = \cos(x + 120^o)$;　　f) $\tan 3x.\tan x = 1$;

Bài 3: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3} - 2\sin 2x = 0$;　　b) $2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$;

c) $3\tan(\frac{2x}{3} - 20^o) + \sqrt{3} = 0$;　　d) $4\sin x.\cos x.\cos 2x = 1$;

e) $2\sin x - \sqrt{2}\sin 2x = 0$;　　f) $8\cos^3 x - 1 = 0$;

g) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)(2\cos x + \sqrt{2})\tan 2x = 0$;

h) $(2\sin x + 1)^2 - (2\sin x + 1)(\sin x - \frac{3}{2}) = 0$;

i) $\tan 2x.\sin x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}\tan 2x) - 3\sqrt{3} = 0$.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2(x - 30^o) - \sin^2(x - 30^o) = \sin(x + 60^o)$;　　b) $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$;

c) $\sin^4 x - \sin^4(x + \frac{\pi}{2}) = 4\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x$;

d) $\frac{\cos 2x}{\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos 2x}$;　　e) $\sin^2\left(5x + \frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{4} + \pi\right)$

f) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$;　　g) $\left(\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} + \cot 2x\right)(3\tan x - \sqrt{3}) = 0$;

h) $\tan^3x - 1 + \dfrac{1}{\cos^2x} - 3\cot(\dfrac{\pi}{2} - x) = 3$;

i) $\cos2x.\cos x + \sin x.\cos3x = \sin2x.\sin x - \sin3x.\cos x$.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sin(x + 24^o) + \sin(x + 144^o) = \cos20^o$;

b) $\sin x + \sin2x + \sin3x = 0$;

c) $\cos x + \cos2x + \cos3x + \cos4x = 0$;

d) $1 + \sin x + \cos3x = \cos x + \sin2x + \cos2x$;

e) $\cos7x + \sin^22x = \cos^22x - \cos x$;

f) $\sin x + \sin2x + \sin3x = 1 + \cos x + \cos2x$;

g) $\cos^2x + \cos^22x + \cos^23x + \cos^24x = 2$;

h) $\sin x.\sin4x = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3}\cos x\sin4x$.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $\sin3x.\sin5x = \sin11x.\sin13x$;
b) $\sin3x.\cos7x = \sin11x.\cos15x$;

c) $\cos x.\cos2x = \cos3x.\cos4x$;
d) $\cos x.\cos2x = \cos3x$;

e) $\sin4x.\cos3x = \sin x$;
f) $\sin x.\sin5x = \cos4x$.

g) $\cos x - \cos2x + \cos3x = \dfrac{1}{2}$;
h) $4\cos x\sin^2x = \cos x - \sin x$;

i) $\sin x.\sin2x.\sin3x = \dfrac{1}{4}\sin4x$.

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác:

Dạng: $a\sin x + b = 0$; $a\cos x + b = 0$;

$a\tan x + b = 0$; $a\cot x + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0)$.

Phương pháp giải: *Đưa về phương trình cơ bản, chẳng hạn:*

$$a\sin x + b = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{b}{a}.$$

Chú ý: *Dạng tổng quát của phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là:*

$a\sin[f(x)] + b = 0$; $a\cos[f(x)] + b = 0$; $a\tan[f(x)] + b = 0$; $a\cot[f(x)] + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0)$.

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác:

Dạng: $a\sin^2x + b\sin x + c = 0$; $a\cos^2x + b\cos x + c = 0$;

$a\tan^2x + b\tan x + c = 0$; $a\cot^2x + b\cot x + c = 0$;$(a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$.

Phương pháp giải: *Đặt ẩn phụ t là hàm số lượng giác trong phương trình, rồi giải phương trình bậc hai đối với t.*

Chẳng hạn: Giải phương trình: $a\sin^2x + b\sin x + c = 0$.

Đặt $t = \sin x$ $(-1 \leq t \leq 1)$, *ta có phương trình:* $at^2 + bt + c = 0$.

Chú ý: * *Khi đặt* $t = \sin x$ (*hoặc* $t = \cos x$) *thì phải có điều kiện:* $-1 \leq t \leq 1$.

* *Dạng tổng quát của phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là:*

$$a\sin^2[f(x)] + b\sin[f(x)] + c = 0;\ a\cos^2[f(x)] + b\cos[f(x)] + c = 0;$$
$$a\tan^2[f(x)] + b\tan[f(x)] + c = 0;\ a\cot^2[f(x)] + b\cot[f(x)] + c = 0;(a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0).$$

3. Phương trình dạng: $a\sin x + b\cos x = c$ $(a \neq 0; b \neq 0)$:

Phương pháp giải:

Cách1: Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$, *ta được:*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

* *Nếu* $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$ *thì phương trình vô nghiệm.*

* *Nếu* $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ *thì đặt* $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(*hoặc* $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

để đưa về dạng $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (*hoặc* $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

Cách 2: Sử dụng công thức tính sinx *và* cosx theo $t = \tan\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

đưa phương trình về phương trình bậc hai đối với t.

Chú ý:

* *Phương trình* $a\sin x + b\cos x = c$ $(a \neq 0; b \neq 0)$ *có nghiệm khi* $c^2 \leq a^2 + b^2$.

* *Dạng tổng quát của phương trình là:* $a\sin[f(x)] + b\cos[f(x)] = c$ $(a \neq 0; b \neq 0)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác***

Phương pháp: *Đưa về phương trình cơ bản, chẳng hạn:*

$$a\sin x + b = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{b}{a}.$$

Chú ý: *Dạng tổng quát của phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là:*

$$a\sin[f(x)] + b = 0;\ a\cos[f(x)] + b = 0;\ a\tan[f(x)] + b = 0;\ a\cot[f(x)] + b = 0$$

$$(a, b \in \mathbb{R};\ a \neq 0).$$

Thí dụ 1: Giải các phương trình:

a) $2\sin(x + 20^o) - \sqrt{3} = 0;$ **b)** $\cos^2 x - \cos x = 0;$

c) $(\tan 3x + 1)\cos 3x = 0;$ **d)** $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

Giải

a) $2\sin(x + 20^o) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x + 20^o) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + 20^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin(x + 20^o) = \sin 60^o$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 20^o = 60^o + k360^o \\ x + 20^o = 180^o - 60^o + k360^o \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 40^o + k360^o \\ x = 100^o + k360^o \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 0 & (1) \\ \cos x - 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

$(2) \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$

c) ĐK: $\cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}).$

$(\tan 3x + 1)\cos 3x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = -1 \Leftrightarrow \tan 3x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z}).$

d) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0 & (1) \\ \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2=0 & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pi}{6}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

$(2) \Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=2$: vô nghiệm.

Thí dụ 2: Giải và biện luận phương trình: $3\cos 2x + 1 = m^2$.

Giải:

Ta có: $3\cos 2x + 1 = m^2 \Leftrightarrow 3\cos 2x = m^2 - 1 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{m^2-1}{3}$ (*)

1) Nếu $-1 \le \dfrac{m^2-1}{3} \le 1 \Leftrightarrow -3 \le m^2-1 \le 3 \Leftrightarrow 0 \le m^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$ thì:

(*) $\Leftrightarrow 2x = \pm\arccos\dfrac{m^2-1}{3}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{m^2-1}{3}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

2) Nếu $\left[\begin{array}{l} \dfrac{m^2-1}{3}<-1 \\ \dfrac{m^2-1}{3}>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-1<-3 \\ m^2-1>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2\le -2 \\ m^2\ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \nexists m \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

thì: Phương trình vô nghiệm.

Dạng 2: ***Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.***

Phương pháp: *Đặt ẩn phụ t là hàm số lượng giác trong phương trình, rồi giải phương trình bậc hai đối với t.*

Chẳng hạn: Giải phương trình: $a\sin^2x + b\sin x + c = 0$.

Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$, *ta có phương trình:* $at^2 + bt + c = 0$.

Chú ý: * *Khi đặt* $t = \sin x$ (*hoặc* $t = \cos x$) *thì phải có điều kiện:* $-1 \le t \le 1$.

* *Dạng tổng quát của phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là:* $a\sin^2[f(x)] + b\sin[f(x)] + c = 0$; $a\cos^2[f(x)] + b\cos[f(x)] + c = 0$;
$a\tan^2[f(x)] + b\tan[f(x)] + c = 0$; $a\cot^2[f(x)] + b\cot[f(x)] + c = 0$;

$(a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$.

Thí dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2x - 3\sin x + 1 = 0$; **b)** $4\sin^2x + 4\cos x - 1 = 0$;

c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{6}+2x\right) + 2\cot\left(\dfrac{\pi}{6}+2x\right) - 3 = 0$;

d) $\dfrac{3}{\sin^2 2x} + \left(3-\sqrt{3}\right)\cot 2x - 3 - \sqrt{3} = 0$;

e) $\cos(4x + 60^\circ) - 5\cos(2x + 30^\circ) + 4 = 0$;

Giải

a) Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$ ta có: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Khi $t = 1$: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Khi $t = \dfrac{1}{2}$: $\sin x = \dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $4\sin^2 x + 4\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4(1 - \cos^2 x) + 4\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -4\cos^2 x + 4\cos x + 3 = 0$.

Đặt $t = \cos x$ $(-1 \le t \le 1)$ ta có: $-4t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{2} \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$t = \dfrac{3}{2}$ loại vì không phù hợp điều kiện của t.

Khi $t = -\dfrac{1}{2}$: $\sin x = -\dfrac{1}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{6} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) ĐK: $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) \ne 0$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) \ne 0$.

$\tan\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) + 2\cot\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) + 2.\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right)} - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \tan^2\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) - 3\tan\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) + 2 = 0$.

Đặt $t = \tan\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right)$ ta có: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Khi t = 1: $\tan\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=\tan\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+2x=\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$

Khi t = 2: $\tan\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=2$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}+2x=\arctan 2+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\arctan 2}{2}-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$.

d) ĐK: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

$\frac{3}{\sin^2 2x}+\left(3-\sqrt{3}\right)\cot 2x-3-\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow 3(1+\cot^2 2x)+(3-\sqrt{3})\cot 2x-3-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cot^2 2x+(3-\sqrt{3})\cot 2x-\sqrt{3}=0$.

Đặt t = cot2x, ta có: $3t^2+(3-\sqrt{3})t-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$

Khi t = –1: $\cot 2x=-1 \Leftrightarrow \cot 2x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Khi $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$: $\cot 2x=\frac{\sqrt{3}}{3}=\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

e) $\cos(4x+60^o)-5\cos(2x+30^o)+4=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2(2x+30^o)-1-5\cos(2x+30^o)+4=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2(2x+30^o)-5\cos(2x+30^o)+3=0$.

Đặt $t=\cos(2x+30^o)\ (-1\le t\le 1)$, ta có: $2t^2-5t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{3}{2} \\ t=1\end{array}\right.$

$t=\frac{3}{2}$ loại vì không phù hợp điều kiện của t.

Khi t = 1: $\cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Thí dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $2\sin^2 x-3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$;

b) $\cos^2 2x - 7\sin 4x + 3\sin^2 2x = -3$;

c) $\dfrac{1}{\cos(x+10^\circ)} = 4\sin(x+10^\circ) + 6\cos(x+10^\circ)$.

Giải

a) Ta thấy: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (tức là $\cos x = 0$) không là nghiệm của phương trình

$\Rightarrow \cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$, ta được: $2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$.

Đặt $t = \tan x$, ta có: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Khi $t = 1$: $\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Khi $t = \dfrac{1}{2}$: $\tan x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $\cos^2 2x - 7\sin 4x + 3\sin^2 2x = -3$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 14\sin 2x.\cos 2x + 3\sin^2 2x = -3(\sin^2 2x + \cos^2 2x)$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 14\sin 2x.\cos 2x + 3\sin^2 2x = -3\sin^2 2x - 3\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 14\sin 2x.\cos 2x + 6\sin^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 7\sin 2x.\cos 2x + 3\sin^2 2x = 0$

Ta thấy: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ (tức là $\cos 2x = 0$) không là nghiệm của phương trình

$\Rightarrow \cos 2x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 2x$, ta được: $2\tan^2 2x - 7\tan 2x + 3 = 0$.

Đặt $t = \tan 2x$, ta có: $2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Khi $t = 3$: $\tan 2x = 3 \Leftrightarrow 2x = \arctan 3 + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\arctan 3 + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Khi $t = \dfrac{1}{2}$: $\tan 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \arctan\dfrac{1}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{1}{2} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý: – Phương trình dạng: $a.\sin^2 x + b.\sin x\cos x + c.\cos^2 x = 0$ $(a; b; c \neq 0)$.

c) ĐK: $\cos(x + 10^\circ) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 80^\circ + k180^\circ$.

Ta có: $\dfrac{1}{\cos(x+10^\circ)} = 4\sin(x+10^\circ) + 6\cos(x+10^\circ)$

$\Leftrightarrow 1 = 4\sin(x + 10^\circ)\cos(x + 10^\circ) + 6\cos^2(x + 10^\circ)$

$\Leftrightarrow \cos^2(x + 10^\circ) + \sin^2(x + 10^\circ) = 4\sin(x + 10^\circ)\cos(x + 10^\circ) + 6\cos^2(x + 10^\circ)$

$\Leftrightarrow \sin^2(x + 10^\circ) - 4\sin(x + 10^\circ)\cos(x + 10^\circ) - 5\cos^2(x + 10^\circ) = 0$

Chia hai vế cho $\cos^2(x + 10^\circ)$, ta được: $\tan^2(x + 10^\circ) - 4\tan(x + 10^\circ) - 5 = 0$

Đặt $t = \tan(x + 10^o)$, ta có: $t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 5 \end{array}\right.$

Khi $t = -1$: $\tan(x + 10^o) = -1 = \tan(-45^o) \Leftrightarrow x + 10^\circ = -45^\circ + k180^\circ$

$\Leftrightarrow x = -35^\circ + k180^\circ\ (k \in \mathbb{Z})$.

Khi $t = 5$: $\tan(x + 10^o) = 5 = \tan\alpha^o \Leftrightarrow x + 10^\circ = \alpha^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \alpha^\circ - 10^\circ + k180^\circ\ (k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý: – Phương trình dạng: $a.\sin^2x + b.\sin x\cos x + c.\cos^2x = 0$ ($a; b; c \neq 0$).

Phương pháp giải:

– Ta có: $\cos x = 0$ không là nghiệm của phương trình (vì $a \neq 0$).

Chia hai vế cho $\cos^2x$, ta có: $a.\tan^2x + b.\tan x + c = 0$

(phương trình bậc hai đối với tanx).

– Nếu phương trình dạng: $a.\sin^2x + b.\sin x\cos x + c.\cos^2x = d$ thì ta thay

$d = d.\sin^2x + d.\cos^2x$, rút gọn đưa về dạng trên.

Dạng 3: Phương trình dạng: asinx + bcosx = c ($a \neq 0$; $b \neq 0$):

Phương pháp:

Cách1: Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

* *Nếu* $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| > 1$ *thì phương trình vô nghiệm.*

* *Nếu* $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$ *thì đặt* $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(*hoặc* $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

để đưa về dạng $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (*hoặc* $\cos(x - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

Cách 2: Sử dụng công thức tính sinx *và* cosx theo $t = \tan\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

đưa phương trình về phương trình bậc hai đối với t.

Chú ý: * *Phương trình* $a\sin x + b\cos x = c$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$) *có nghiệm khi* $c^2 \leq a^2 + b^2$.

* *Dạng tổng quát của phương trình là:*

$a\sin[f(x)] + b\cos[f(x)] = c$ ($a \neq 0$; $b \neq 0$).

Thí dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $3\sin x + 4\cos x = 5$; **b)** $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2}$;

c) $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Giải:

a) Ta có: $\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Khi đó: $3\sin x + 4\cos x = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = 1$

Đặt: $\cos\varphi = \frac{3}{5}$; $\sin\varphi = \frac{4}{5}$, ta có: $\cos\varphi.\sin x + \sin\varphi.\cos x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin(x+\varphi) = 1 \Leftrightarrow x+\varphi = \frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}-\varphi+k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $2\sin 2x - 2\cos 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \\ x=\frac{13\pi}{24}+k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Ta có: $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=$

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)=-\cos\left[\pi-\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)\right]=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Khi đó: $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ta có: $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$

Đặt: $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

ta có: $\cos\varphi.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) - \sin\varphi.\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4} - \varphi) = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4} - \varphi) = \sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \alpha + \varphi + k2\pi \\ x = \dfrac{3\pi}{4} - \alpha + \varphi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (\sin\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}).$$

Chú ý: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Thí dụ 2: Giải và biện luận phương trình: $2\sin x + m\cos x = 1 - m$.

Giải:

Thay $x = (2k + 1)\pi$ ta được: $-m = 1 - m \Leftrightarrow 0 = 1 \Rightarrow x = (2k + 1)\pi$ không là nghiệm của phương trình.

Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, ta có: $2\sin x + m\cos x = 1 - m$

$\Leftrightarrow 2.\dfrac{2t}{1+t^2} + m\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 1 - m$

$\Leftrightarrow 4t + m(1 - t^2) = (1 - m)(1 + t^2)$

$\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2m = 0$ (*): $\Delta' = 4 + 2m - 1 = 3 + 2m$.

1) Nếu $\Delta' = 3 + 2m < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình vô nghiệm.

2) Nếu $\Delta' = 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình (*) có nghiệm kép $t = 2$:

$$\tan\frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow x = 2\arctan 2 + k2\pi.$$

3) Nếu $\Delta' = 3 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình (*) có 2 nghiệm:

$t_1 = 2 - \sqrt{3+2m}$; $t_2 = 2 + \sqrt{3+2m}$

$\Leftrightarrow \tan\dfrac{x}{2} = 2 - \sqrt{3+2m}$; $\tan\dfrac{x}{2} = 2 + \sqrt{3+2m}$

$\Leftrightarrow x = 2\arctan(2 - \sqrt{3+2m}) + k2\pi$; $x = 2\arctan(2 + \sqrt{3+2m}) + k2\pi$.

Dạng 4: ***Phương trình đối xứng đối với sinx và cosx***

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0;\ a, b \neq 0.$$

Phương pháp: Đặt $t = \sin x + \cos x$;

Khi đó: $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, thay vào phương trình ta được:

$$bt^2 + 2at + 2c - b = 0\ (*)$$

Chú ý:

* $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ nên điều kiện của t là $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Vì vậy khi giải xong phương trình (*) cần đối chiếu điều kiện của t.

* Phương trình dạng: $a(\sin x - \cos x) \pm b\sin x\cos x + c = 0$ không phải là dạng đối xứng nhưng cũng có thể giải bằng cách tương tự:

Đặt $t = \sin x - \cos x$; $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x.\cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$.

Thí dụ : Giải các phương trình sau:

a) $2(\sin x + \cos x) - 4\sin x\cos x - 1 = 0$;
b) $\sin 2x - 12(\sin x + \cos x) + 12 = 0$;
c) $\sin x - \cos x + 4\sin x\cos x + 1 = 0$;
d) $\cos^3 x + \sin^3 x = 1$.

Giải

a) Đặt $t = \sin x + \cos x$; $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$.

Khi đó: $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, thay vào phương trình ta được:

$$2t - 4\frac{t^2 - 1}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ t = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

* $t = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$: $\sin x + \cos x = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

* $t = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$: $\sin x + \cos x = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $\sin 2x - 12(\sin x + \cos x) + 12 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 12(\sin x + \cos x) + 12 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\cos x - 6(\sin x + \cos x) + 6 = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x;\ -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Khi đó: $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, thay vào phương trình ta được:

$$\frac{t^2-1}{2} - 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 12t + 11 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 11 \end{array}\right.$$

* $t = 1$: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* $t = 11 > \sqrt{2}$: loại.

c) Đặt $t = \sin x - \cos x$; $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Khi đó: $\sin x.\cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$, thay vào phương trình ta được:

$$t + 4\frac{1-t^2}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

* $t = -1$: $\sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

* $t = \dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$: loại.

d) $\cos^3 x + \sin^3 x = 1 \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \cos x\sin x) = 1$.

Đặt $t = \sin x + \cos x;\ -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Khi đó: $\sin x.\cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$, hay vào phương trình ta được:

$$t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow t(3 - t^2) = 2 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t - 1 = 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

$* \ t = 1$: $\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$* \ t = 2 > \sqrt{2}$: loại.

C – BÀI TẬP.

Bài 1: Giải các phương trình:

a) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$; b) $\sqrt{3}\tan 2x + 3 = 0$;

c) $\cos 2x + \sqrt{2}\sin x = 1$; d) $2\sin 3x + \sqrt{2}\sin 6x = 0$;

e) $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = 1$; f) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$.

Bài 2: Giải các phương trình:

a) $2\sin x - 2\cos x = \sqrt{2}$; b) $5\cos 2x - 12\cos 2x = 13$;

c) $\sin 2x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$; d) $\sin(x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{3}\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$;

e) $2\sin(2x + 15^o) + 3\cos(x + 15^o) = \frac{1}{2}$;

f) $\sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$;

g) $8\sin x.\sin 2x + 6\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 5 + 7\cos x$;

h) $2\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right).\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2(x - \frac{\pi}{8}) = \sqrt{3}$;

i) $3\cos x + 4\sin x + \frac{2}{3\cos x + 4\sin x - 6} = 3$.

Bài 3: Giải các phương trình:

a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; b) $\cos^2 2x + \sin 2x + 1 = 0$;

c) $\cot^2 x - 4\cot x + 3 = 0$; d) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3} - 1)\cos x + \sqrt{3} = 0$;

e) $\sin^2 2x - 2\cos^2 x + \frac{3}{4} = 0$; f) $\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$;

b) $2\cos 2x + \cos^2\dfrac{x}{2} - 10\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}\cos x$;

c) $\cos 5x.\cos x = \cos 4x.\cos 2x + 3\cos^2 x + 1$;

d) $\cos 4x - 3\left(\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right) + 2 = 0$.

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$;

b) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$;

c) $\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$

d) $3\sin^2 x + 8\sin x\cos x + (8\sqrt{3} - 9)\cos^2 x = 0$;

e) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$;

f) $\sin^2 2x + \sin 4x - 2\cos^2 2x = \dfrac{1}{2}$;

g) $2\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x\cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x = -1$;

h) $3\sin^2(180^\circ - x) + 2\sin(90^\circ + x)\cos(90^\circ + x) - 5\sin^2(270^\circ + x) = 0$.

Bài 6: Giải các phương trình sau:

a) $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 2 = 0$;

b) $\sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 5 = 0$;

c) $\cos x - \sin x + 3\sin 2x = 1$;

d) $2(\sin x - \cos x) + \sin 2x + 5 = 0$;

e) $(\sin x - \cos x)^2 - (\sqrt{2} + 1)(\sin x - \cos x) + \sqrt{2} = 0$;

f) $2\sin 2x - 3\sqrt{6}\,|\sin x + \cos x| + 8 = 0$;

g) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x - 45^\circ) = 1$.

Bài 7: Giải các phương trình sau:

a) $(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos(2x - \dfrac{\pi}{6})$;

b) $2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$;

c) $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$;

d) $4\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tan x$;

e) $3\tan 3x + \cot 2x = 2\tan x + \dfrac{2}{\sin 4x}$;

f) $\dfrac{\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x}}{\cos x} = 4\sin x$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $4\cos^2 x - 2(\sqrt{3}+1)\cos x + \sqrt{3} = 0$;

b) $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - 3 = 0$;

c) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$;

d) $\sin^2 2x - 2\cos^2 x + \dfrac{3}{4} = 0$;

e) $2\cos 6x + \tan 3x = 1$;

f) $\dfrac{1}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x = 5$;

g) $2\cos 2x + \cos^2\dfrac{x}{2}.10\sin(\dfrac{5\pi}{2} - x) + \dfrac{7}{2} = \dfrac{1}{2}\cos x$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x + \sin 2x.\sin 4x + \sin 3x.\sin 9x = 1$;

b) $\cos 2x - \sin 2x.\sin 4x - \cos 3x.\cos 9x = 1$;

c) $\cos 2x + 2\sin x\sin 2x = 2\cos x$;

d) $\cos 5x.\cos x = \cos 4x.\cos 2x + 3\cos^2 x + 1$;

e) $\cos 4x + \sin 3x.\cos x = \sin x.\cos 3x$.

f) $\sin(4x + \dfrac{\pi}{4})\sin 6x = \sin(10x + \dfrac{\pi}{4})$;

g) $(1 + \tan^2 x)(1 + \sin 2x) = 1$;

h) $\tan(\dfrac{2\pi}{3} - x) + \tan(\dfrac{\pi}{3} - x) + \tan 2x = 0$;

i) $\cos\dfrac{\pi x}{31}\cos\dfrac{2\pi x}{31}\cos\dfrac{4\pi x}{31}\cos\dfrac{8\pi x}{31}\cos\dfrac{16\pi x}{31} = \dfrac{1}{32}$.

Bài 3: Giải các phương trình:

a) $(1 - \cos 2x)\sin 2x = \sqrt{3}\sin^2 x$;

b) $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x$;

c) $\dfrac{1}{1+\cot x} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1-\cot x}{2(1+\cot x)}$;

d) $1 - (2 + \sqrt{2})\sin x = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1+\cot^2 x}$;

e) $\tan^2 x = \dfrac{1-\cos x}{1-\sin x}$;

f) $2(\sin^3 x + \cos^3 x) + \sin 2x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$;

g) $\cos x(1 - \tan x)(\sin x + \cos x) = \sin x$;

h) $(1 + \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$;

i) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$.

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \cos x - \dfrac{\sin 2x}{3} - 1 = 0$;

b) $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x - (1 + \sqrt{2}) = 0$;

c) $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$;

d) $\tan x + \tan 2x = \sin 3x.\cos x$;

e) $\dfrac{1+\cos x}{\cos\frac{x}{2}} = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$;

f) $\tan(x - 45^\circ).\tan x.\tan(x + 45^\circ) = \dfrac{4\cos^2 x}{\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bài 1.

a) $\cos 2x + 1 \neq 0 \Rightarrow \cos 2x \neq -1 \Rightarrow x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $2x + \dfrac{\pi}{4} \neq k\pi \Rightarrow x \neq -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$;

c) $$\begin{cases} 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 1 + \sin x \geq 0 \\ \sqrt{1+\sin x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}.$$

d) $$\begin{cases} 1 + \sin x \geq 0 \\ \sqrt{1+\sin x} - \sqrt{2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi.$$

e) $$\begin{cases} 2 - 2\cos x \geq 0 \\ \sqrt{2-2\cos x} - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x \leq 1 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x \neq \dfrac{(2k+1)\pi}{2}.$$

f) . $$\begin{cases} 3x \neq k\pi \\ 1 + \sin 3x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{1 + \sin 3x} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{3} \\ \sin 3x \geq -1 \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{3} \\ \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq \dfrac{k\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{3}$$

g) $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq k\pi \end{cases}$

Bài 2.

a) Hàm số lẻ. b) Hàm số chẵn.

c) $f(\frac{\pi}{4}) = 1$; $f(-\frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow$ Hàm số không chẵn, không lẻ.

d) Hàm số chẵn.

e) $f(\frac{\pi}{3}) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$; $f(-\frac{\pi}{3}) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ Hàm số không chẵn, không lẻ.

f) Hàm số lẻ.

Bài 3.

a) Giả sử có a: $0 < a < \frac{2\pi}{3}$ sao cho: $f(x + a) = f(x), \forall x \in D$ tức là:

$\sin(3x + 3a) = \sin 3x, \forall x \in D$.

Chọn $x = 0$, ta có: $\sin 3a = 0 \Rightarrow 3a = k\pi \Rightarrow a = \frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Do $0 < \frac{k\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$ nên $0 < k < 2 \Rightarrow k = 1$ hay $a = \frac{\pi}{3}$.

Thử lại: $\sin[3(x + \frac{\pi}{3})] = \sin 3x \Rightarrow \sin(3x + \pi) = \sin 3x$ không đúng với $\forall x \in D$, chẳng hạn: khi $x = \frac{\pi}{6}$ thì $\sin(3.\frac{\pi}{6} + \pi) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ còn $\sin(3.\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Vì vậy $a = \frac{\pi}{3}$ không phải là chu kì của hàm số.

b) Chọn $x_o = -\frac{2\pi}{7}$.

c) Chọn $x_o = -\frac{\pi}{30}$.

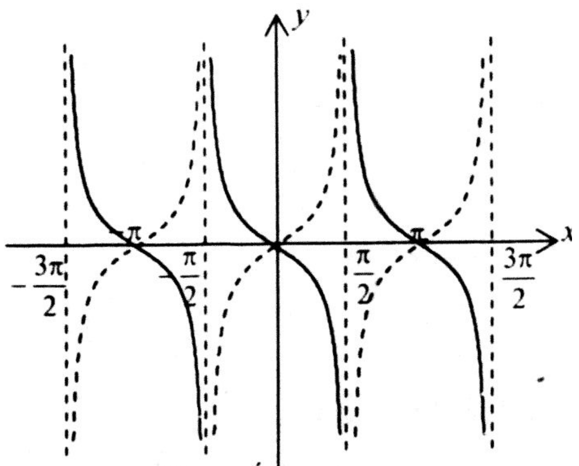
d) Chọn $x_o = 0$.

e) Chọn $x_o = 0$.

Bài 4.

a) $T = \frac{\pi}{3}$. b) $T = 3\pi$. c) $T = \frac{\pi}{2}$. d) $T = \frac{\pi}{2}$.

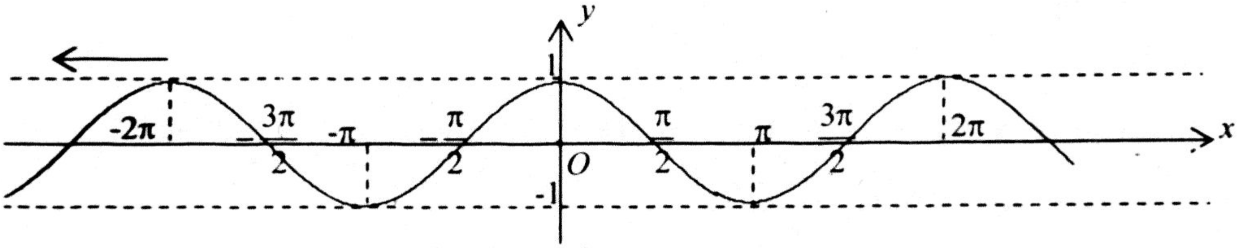
Bài 5.



a) **y** = –tanx: phần đối xứng của đồ thị **y = tanx** qua trục hoành (phần đồ thị **đậm nét** trong hình)

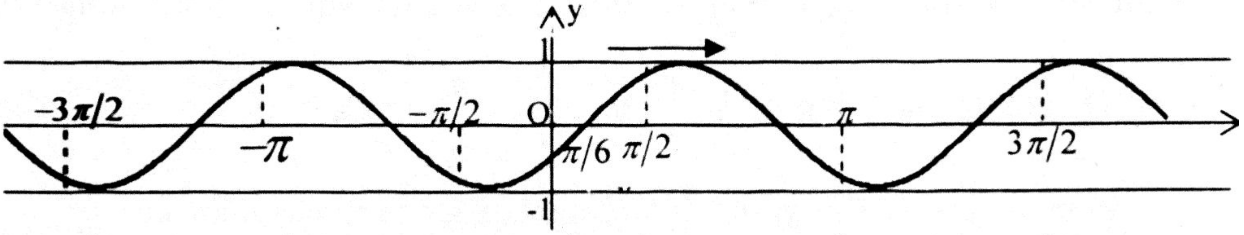
Hàm số y = -tanx

b) Đồ thị hàm số y = cos(|x|) trùng với đồ thị hàm số y = cosx vì cos(–x) = cosx

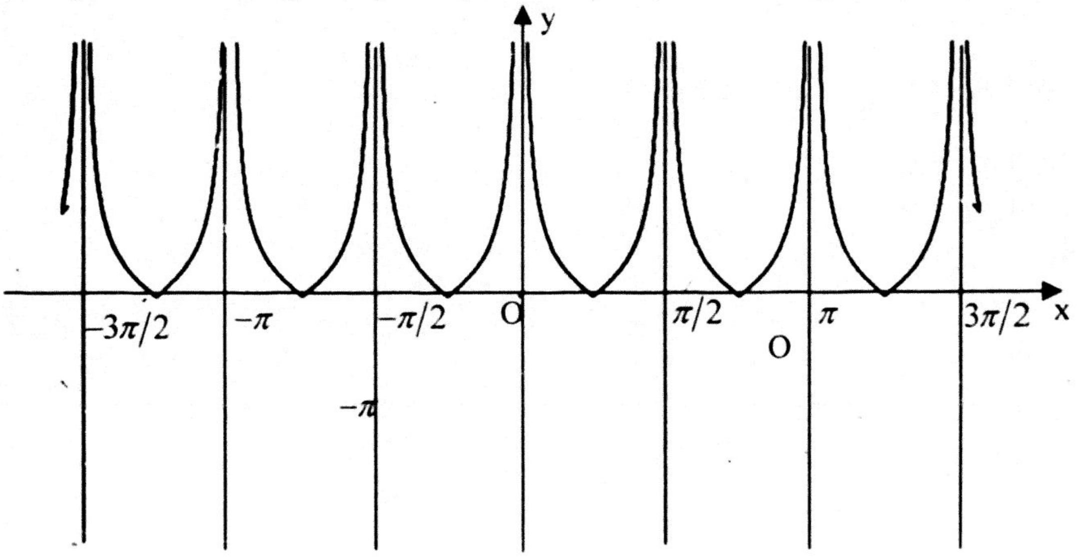


Đồ thị hàm số y = cosx

c) Đồ thị hàm số $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số y = sinx qua **phép tịnh** tiến song song với trục hoành về bên phải một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{6}$.



d) Đồ thị hàm số y = |cotx| là phần đồ thị hàm số y = cotx nằm trên trục **hoành và** phần đối xứng của phần phía dưới trục hoành qua trục hoành.



Bài 6.

a) GTLN: $y = 9$; GTNN: $y = -1$;

b) GTLN: $y = 2 - \sqrt{2}$; GTNN: $y = 2 - \sqrt{6}$;

c) $y = \dfrac{3}{\cot^2 x + 1} + 1 = 3\sin^2 x + 1$. GTLN: $y = 4$; GTNN: $y = 1$;

d) $y = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$. GTLN: $y = 1$; GTNN: $y = \dfrac{1}{2}$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Bài 1:

a) $$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) $$\cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x + 25^\circ) = -\cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + 25^\circ) = \cos(180^\circ - 45^\circ) \Leftrightarrow \cos(2x + 25^\circ) = \cos 135^\circ$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 55^\circ + k180^\circ \\ x = -80^\circ + k180^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

c) ĐK: $x \neq \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$: $\tan(x + \dfrac{\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(x + \dfrac{\pi}{12}) = \tan\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$.

d) ĐK: $x \neq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{k\pi}{4}$: $\cot(4x + 2) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(4x + 2) = -\cot\dfrac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \cot(4x + 2) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} - \frac{1}{2} + \frac{k\pi}{4}.$$

e) $$\sin(2x - 15^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - 10^\circ) = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 20^\circ + k180^\circ \\ x = 80^\circ + k180^\circ \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có: $\begin{cases} x = 20^\circ + k180^\circ \\ -120^\circ < x < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ x = 20^\circ \end{cases}$;

$\begin{cases} x = 80^\circ + k180^\circ \\ -120^\circ < x < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1; x = -100^\circ \\ k = 0; x = 80^\circ \end{cases}$

Vậy $x = -100^\circ; 20^\circ; 80^\circ$.

f) $\cos(2x+1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(2x+1) = \cos\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2} + k\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2} + k\pi \\ -\pi < x < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0; x = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2} \\ k = 1; x = \dfrac{9\pi}{8} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$;

$\begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2} + k\pi \\ -\pi < x < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0; x = -\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{2} \\ k = 1; x = \dfrac{7\pi}{8} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Bài 2:

a) $\sin(2x-3) = \sin(x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = x + 1 + k2\pi \\ 2x - 3 = \pi - (x+1) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right.$

$(k \in \mathbb{Z})$

b) $\sin 3x = \cos 4x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin(\dfrac{\pi}{2} - 4x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

c) ĐK: $x \neq \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{k\pi}{3}$: $\tan(3x+2) + \cot 2x = 0 \Leftrightarrow \tan(3x+2) = -\cot 2x$

$\Leftrightarrow \tan(3x+2) = \cot(-2x) = \tan(\dfrac{\pi}{2} + 2x)$.

d) $\sin 5x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = -\cos 4x \Leftrightarrow \sin 5x = \cos(\pi - 4x)$

$\Leftrightarrow \sin 5x = \sin\left[\dfrac{\pi}{2} - (\pi - 4x)\right] = \sin(4x - \dfrac{\pi}{2})$.

e) $\sin(2x + 50^\circ) = \cos(x + 120^\circ)$

$\Leftrightarrow \sin(2x + 50^\circ) = \sin[90^\circ - (x + 120^\circ)] = \sin(-x - 30^\circ)$.

f) ĐK: $x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$ và $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$:

$\tan 3x . \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan 3x = \dfrac{1}{\tan x} = \cot x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan(\dfrac{\pi}{2} - x)$.

Bài 3:

a) $\sqrt{3} - 2\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$.

b) $2\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 2\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \mathrm{ccs}\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$.

c) ĐK: $x \neq 135^\circ + k270^\circ$: $3\tan\left(\dfrac{2x}{3} - 20^\circ\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 3\tan\left(\dfrac{2x}{3} - 20^\circ\right) = -\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \tan\left(\dfrac{2x}{3} - 20^\circ\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -\tan 30^\circ = \tan(-30^\circ)$.

d) $4\sin x.\cos x.\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 1$.

e) $2\sin x - \sqrt{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(1 - \sqrt{2}\cos x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 1 - \sqrt{2}\cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

f) $8\cos^3 x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x - 1 = 0 \\ \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \text{VN} \end{array}\right.$$

g) ĐK: $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$: $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)(2\cos x + \sqrt{2})\tan 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = 0 \\ 2\cos x + \sqrt{2} = 0 \\ \tan 2x = 0 \end{array}\right.$$

h) $(2\sin x + 1)^2 - (2\sin x + 1)(\sin x - \dfrac{3}{2}) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x + \dfrac{5}{2}) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x + 1 = 0$.

i) ĐK: $x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$: $\tan 2x.\sin x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}\tan 2x) - 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \tan 2x.\sin x + \sqrt{3}\sin x - 3\tan 2x - 3\sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \tan 2x(\sin x - 3) + \sqrt{3}(\sin x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - 3)(\tan 2x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \tan 2x + \sqrt{3} = 0$.

Bài 4:

a) $\cos^2(x-30^\circ) - \sin^2(x-30^\circ) = \sin(x+60^\circ) \Leftrightarrow \cos2(x-30^\circ) = \sin(x+60^\circ)$

$\Leftrightarrow \cos(2x-60^\circ) = \sin(x+60^\circ)$.

b) ĐK: $1+\cos2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$:

$$\frac{\sin2x}{1+\cos2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2x} = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0.$$

c) Ta có: $\sin^4(x+\frac{\pi}{2}) = \cos^4x$; $4\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x = \sin2x$

$$\sin^4x - \sin^4(x+\frac{\pi}{2}) = 4\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}.\cos x \Leftrightarrow \sin^4x - \cos^4x = \sin2x$$

$\Leftrightarrow (\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x-\cos^2x) = \sin2x \Leftrightarrow -\cos2x = \sin2x$.

d) ĐK: $x \neq -\frac{3\pi}{4}+k\pi$; $x \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$:

$$\frac{\cos2x}{\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos2x} \Leftrightarrow \cos^22x = \sin^2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cos4x}{2} = \frac{1-\cos2\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}{2} \Leftrightarrow \cos4x = -\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos4x = \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$$

e) $\sin^2\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{4}+\pi\right) \Leftrightarrow \frac{1-\cos2\left(5x+\frac{2\pi}{5}\right)}{2} = \frac{1+\cos2\left(\frac{x}{4}+\pi\right)}{2}$

$$\Leftrightarrow -\cos\left(10x+\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}-10x\right) = \cos\frac{x}{2}.$$

f) $\sin^22x + \cos^23x = 1 \Leftrightarrow \sin^2x = 1-\cos^23x \Leftrightarrow \sin^2x = \sin^23x$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos4x}{2} = \frac{1-\cos6x}{2} \Leftrightarrow \cos4x = \cos6x.$$

g) ĐK: $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$; $x \neq -\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$: $\left(\frac{\tan x-1}{\tan x+1}+\cot2x\right)(3\tan x-\sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{\tan x-1}{\tan x+1}+\cot2x = 0 & (1) \\ 3\tan x-\sqrt{3} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1):

$$\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} + \cot 2x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = -\cot 2x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = \cot(-2x)$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right).$$

h) ĐK: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\tan^3 x - 1 + \frac{1}{\cos^2 x} - 3\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 3 \Leftrightarrow \tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x(\tan x + 1) - 3(\tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\tan x + 1)(\tan^2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan^2 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \tan x = \pm\sqrt{3} = \tan\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right.$$

i) $\cos 2x.\cos x + \sin x.\cos 3x = \sin 2x.\sin x - \sin 3x.\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x = -(\sin x.\cos 3x + \sin 3x.\cos x)$

$\Leftrightarrow \cos(2x + x) = -\sin(x + 3x) \Leftrightarrow \cos 3x = -\sin 4x.$

Bài 5:

a) $\sin(x + 24^o) + \sin(x + 144^o) = \cos 20^o \Leftrightarrow 2\sin(x + 84^o)\cos 60^o = \cos 20^o$

$\Leftrightarrow \sin(x + 84^o) = \cos 20^o.$

b) ĐS: $x = \frac{k\pi}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

HD: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 2\sin 2x\cos x + \sin 2x = \sin 2x(2\cos x + 1)$.

c) ĐS: $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$; $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$

HD: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 2\cos 2x\cos x + 2\cos 3x\cos x$

$= 2\cos x(\cos 2x + \cos 3x)$

d) ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$; $x = k2\pi$; $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k.\pi}{3}$.

HD: $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sin x = \cos x - \cos 3x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 2\sin 2x\sin x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) = \sin 2x(2\sin x + 1) \Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - \sin 2x) = 0.$

e) ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$; $x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}$.

HD: $\cos7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x \Leftrightarrow \cos7x + \cos x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos4x\cos3x = \cos4x \Leftrightarrow \cos4x(2\cos3x - 1) = 0.$

f) ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi;\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi;\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

HD: $\sin x + \sin2x + \sin3x = 1 + \cos x + \cos2x$

$\Leftrightarrow 2\sin2x\cos x + \sin2x = 2\cos^2 x + \cos x$

$\Leftrightarrow \sin2x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1) \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin2x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\cos x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

g) ĐS: $x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ x = (2k+1)\frac{\pi}{4};\ x = (2k+1)\frac{\pi}{10}.$

HD: $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2.$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos2x}{2} + \frac{1+\cos4x}{2} + \frac{1+\cos6x}{2} + \frac{1+\cos8x}{2} = 2$

$\Leftrightarrow \cos2x + \cos4x + \cos6x + \cos8x = 0$

h) ĐS: $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi;\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}.$

HD: $\sin x.\sin4x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3}\cos x\sin4x$

$\Leftrightarrow \sin x.\sin4x + \sqrt{3}\cos x\sin4x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow \sin4x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow \sin4x\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\sin4x = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)(\sin4x - 1) = 0.$

Bài 6:

a) ĐS: $x = \frac{k\pi}{8};\ x = \frac{k\pi}{16};$

b) ĐS: $x = \frac{k\pi}{8};\ x = \frac{(2k+1)\pi}{36};$

c) ĐS: $x = \frac{k\pi}{5};\ x = \frac{k\pi}{2};$

d) ĐS: $x = \frac{k\pi}{2};$

e) ĐS: $x = \frac{k\pi}{3};\ x = \frac{(2k+1)\pi}{8};$

f) ĐS: $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi;\ x = \frac{(2k+1)\pi}{10};$

g) ĐS: $x = \frac{(2k+1)\pi}{7}.$

HD: $x = (2k+1)\pi$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow \cos\frac{x}{2} \neq 0$

PT $\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}(\cos x - \cos 2x + \cos 3x) = \cos\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2}\cos x - 2\cos\frac{x}{2}\cos 2x + 2\cos\frac{x}{2}\cos 3x = \cos\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{7x}{2} + \cos\frac{5x}{2} = \cos\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{7x}{2} = 0.$

h) ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

HD: $4\cos x\sin^2 x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow 2\sin 2x.\sin x = \cos x - \sin x$

$\Leftrightarrow \cos x - \cos 3x = \cos x - \sin x \Leftrightarrow \cos 3x = \sin x$.

i) ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{k\pi}{2}$.

HD: $\frac{1}{4}\sin 4x = \sin x.\sin 2x.\sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x)$

$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 4x = 0.$

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

Bài 1:

a) ĐS: $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$; b) ĐS: $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$;

c) ĐS: $x = k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

HD: $\cos 2x + \sqrt{2}\sin x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x - 1 + \sqrt{2}\sin x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0 \Leftrightarrow -\sin x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0.$

d) ĐS: $x = \frac{k\pi}{3}$; $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}$.

HD: $2\sin 3x + \sqrt{2}\sin 6x = 0 \Leftrightarrow 2\sin 3x(1 + \sqrt{2}\cos 3x) = 0.$

e) ĐS: $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$

HD: $3\cos^2 x - 5\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 3(\cos^2 x - \sin^2 x) - 2\sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow 3\cos 2x - (1 - \cos 2x) = 1 \Leftrightarrow 4\cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}.$

f) ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

HD: ĐK $\sin x \neq 0$: $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x(\sin x + \cos x) = 1$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - \sin x) = 0.$

Bài 2:

a) ĐS: $x = \dfrac{5\pi}{12} + k2\pi$; $x = \dfrac{13\pi}{12} + k2\pi$.

b) ĐS: $x = -\dfrac{\alpha}{2} + k\pi$ với $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$.

c) ĐS: $x = \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(\tan\alpha = \dfrac{1}{2})$.

HD: $\sin 2x + \sin^2 x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin 2x + 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \tan 2x = \dfrac{1}{2}$

d) ĐS: $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

HD: $\sin(x - \dfrac{\pi}{3}) + \sqrt{3}\cos(x - \dfrac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2}$.

e) ĐS: $x = \varphi^o - 15^o \pm \alpha^o + k360^o$ $(\cos\varphi^o = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$; $\cos\alpha^o = \dfrac{1}{2\sqrt{13}})$

f) ĐS: $x = \dfrac{\varphi}{2} + k\pi$ $(\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})$.

HD: $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin 2x.\cos\dfrac{\pi}{6} - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

Pt $\Leftrightarrow (\sqrt{3} - 1)\cos 2x + \left(\sqrt{3} + 1\right)\sin 2x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos(2x - \varphi) = 2\sqrt{2}$.

g) ĐS: $x = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\varphi}{3} + \dfrac{k2\pi}{3}$ $(\sin\varphi = \dfrac{3}{5})$

HD: $\sin x.\sin 2x = \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$;

$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) =$

$\dfrac{1}{2}\left[\sin(x + \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} + 2x) + \sin(x + \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} - 2x)\right] = \dfrac{1}{2}(\sin 3x + \cos x)$

Pt $\Leftrightarrow 4(\cos x - \cos 3x) + 3(\sin 3x + \cos x) = 5 + 7\cos x$

$\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\cos 3x = 5.$

h) HD: $2\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\sin(x-\frac{\pi}{4})$;

$$2\cos^2(x-\frac{\pi}{8})=1+\cos(x-\frac{\pi}{4})$$

$$\text{Pt}\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}-1.$$

i) HD: Đặt t = 3cosx + 4sinx –6

$$3\cos x+4\sin x+\frac{2}{3\cos x+4\sin x-6}=3\Leftrightarrow t+6+\frac{2}{t}=3$$

$$\Leftrightarrow t^2+3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\cos x+4\sin x=5\\3\cos x+4\sin x=4\end{array}\right.$$

Bài 3.

a) ĐS: $x=k2\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$;

b) ĐS: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

HD: $\cos^2 2x+\sin 2x+1=0\Leftrightarrow 1-\sin^2 2x+\sin 2x+1=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x-\sin 2x-2=0.$

c) ĐS: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\text{arccot}3+k\pi$;

d) ĐS: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi$

$$\text{HD: }4t^2-2(\sqrt{3}-1)t+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}\\t=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

e) ĐS: $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$

HD: $\sin^2 2x-2\cos^2 x+\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow 1-\cos^2 2x-(1+\cos 2x)+\frac{3}{4}=0$

$\Leftrightarrow -\cos^2 2x-\cos 2x+\frac{3}{4}=0.$

f) ĐS: $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$.

HD: Đặt t = tanx; $t\geq 0$: $\tan^4 x-4\tan^2 x+3=0\Leftrightarrow t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x = 1\\ \tan^2 x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = \pm 1\\ \tan x = \pm\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Bài 4

a) **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

HD: $\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$

$\text{Pt} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \frac{5}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \frac{3}{2} = 0$

b) **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

HD: $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$; $\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + 2\pi\right) = \sin x$;

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\text{Pt} \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0.$

c) **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

HD: $\text{pt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x) + \frac{3}{2}(1 + \cos 2x) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 4x - 4\cos 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x - 2\cos 2x - 3 = 0.$

d) **ĐS:** $x = k\pi$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

HD: $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$;

$\text{Pt} \Leftrightarrow \cos 4x - 3\cos 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1 = 0.$

Bài 5:

a) **ĐS:** $x = \arctan 3 + k\pi$; $x = \arctan 7 + k\pi$.

b) **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan 2 + k\pi$.

HD: $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sin x\cos x + \sin^2 x = 0.$

c) HD: $\cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x + \sqrt{3}\cos x = 0\end{array}\right.$$

d) ĐS: $x = \arctan\frac{3\sqrt{3}-8}{3} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

HD: pt $\Leftrightarrow 3\tan^2 x + 8\tan x + 8\sqrt{3} - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = \frac{3\sqrt{3}-8}{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

e) ĐS: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

HD: pt $\Leftrightarrow 4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \sqrt{3}\sin x - \cos x = 0 \end{array}\right.$

f) ĐS: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$; $x = \frac{\arctan(-5)}{2} + \frac{k\pi}{2}$.

HD: pt $\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 4x - 2\cos^2 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 4\sin 2x\cos 2x - 4\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 4\sin 2x\cos 2x - 5\cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 2x + 4\tan 2x - 5 = 0$.

g) ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

HD: pt $\Leftrightarrow 2\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x\cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x = -\sin^2 x - \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x + (3+\sqrt{3})\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\tan^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

h) ĐS: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = \arctan\frac{5}{3} + k\pi$.

HD: $\sin(180^\circ - x) = \sin x$;

$2\sin(90^\circ + x)\cos(90^\circ + x) = \sin(180^\circ + 2x) = -\sin 2x$;

$\sin(270^\circ + x) = -\cos x$.

Pt $\Leftrightarrow 3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$.

Bài 6.

a) ĐS: $x = \pi + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$; $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi$.

b) ĐS: $x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi$;

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}\right) + k2\pi$$

c) ĐS: $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$; $x = k2\pi$; $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

d), e) Bạn đọc tự giải.

f) HD: Đặt $t = |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}\,|\cos(x - \frac{\pi}{4})|$; $0 \le t \le \sqrt{2}$

Pt $\Leftrightarrow 2t^2 - 3\sqrt{6}\,t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow |\cos(x - \frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{6} \\ \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{5\pi}{6}) \end{array}\right.$$

Bài 7:

a) ĐS: $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$.

HD: $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x) = 2\cos(2x - \frac{\pi}{6})$

Pt $\Leftrightarrow 4\cos^2(2x - \frac{\pi}{6}) - \cos(2x - \frac{\pi}{6}) - 5 = 0$.

b) ĐS: $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{6}$; $x = -\frac{\pi}{66} + \frac{k\pi}{11}$.

HD: $\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x) = 2\sin(\frac{\pi}{3} + 5x)$

Pt $\Leftrightarrow \sin 17x + \sin(\frac{\pi}{3} + 5x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{3} + 5x) = -\sin 17x = \sin(-17x)$

c) ĐS: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$; $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}$.

HD: Pt $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1}{2}\sin 5x$

$\Leftrightarrow \sin(7x + \frac{\pi}{6}) = \sin(5x + \frac{\pi}{3})$.

d) ĐS: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$; $x = k2\pi$; $x = -2\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + k2\pi$.

HD: ĐK: $\cos x \neq 0$

Pt $\Leftrightarrow 4\sin x - 2 = 3\tan x - 2\cos x = \dfrac{3\sin x - 2\cos^2 x}{\cos x} = \dfrac{2\sin^2 x + 3\sin x - 2}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 2(2\sin x - 1) = \dfrac{(2\sin x - 1)(\sin x + 2)}{\cos x} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x}(2\sin x - 1)(2\cos x - \sin x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ 2\cos x - \sin x = 2 \end{array}\right.$

e) ĐS: $x = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k2\pi$.

HD: ĐK: $\cos 3x \neq 0$; $\sin 2x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$.

Ta có: $\dfrac{2}{\sin 4x} = \dfrac{1}{\sin 2x.\cos 2x} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 2x}}{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}} = \dfrac{1 + \tan^2 2x}{\tan 2x}$

$= \cot 2x(1 + \tan^2 2x) = \cot 2x + \tan 2x$

Pt $\Leftrightarrow \cot 2x + \tan 2x = 3\tan 3x + \cot 2x - 2\tan x$

$\Leftrightarrow 2(\tan 3x - \tan x) + (\tan 3x - \tan 2x) = 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x.\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos 3x.\cos 2x} = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x + \sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\cos x(4\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4\cos 2x + 1 = 0$.

f) HD: ĐK: $\cos x \neq 0$, ta tìm các nghiệm x nằm trong khoảng $(0; 2\pi)$

Pt $\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| + \left|\cos\dfrac{x}{2}\right|\right) = 2\sin 2x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| + \left|\cos\dfrac{x}{2}\right|\right) = \sin 2x \ (*)$

1) $0 \leq x \leq \pi$: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4k\pi}{3} \\ x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{4k\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$* \ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4k\pi}{3} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$; $\quad * \ x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{4k\pi}{5} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{10}$

2) $\pi < x < 2\pi$: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4k\pi}{3} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4k\pi}{5} \end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$. Làm tương tự như trên.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 2:

a) $\sin^2x + \sin2x.\sin4x + \sin3x.\sin9x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2x + \frac{1}{2}(\cos2x - \cos6x) + \frac{1}{2}(\cos6x - \cos12x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2x) + \frac{1}{2}\cos12x = 1 \Leftrightarrow \cos12x = 1. \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{6}.$$

b) $\cos2x - \sin2x.\sin4x - \cos3x.\cos9x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos2x - \frac{1}{2}(\cos2x - \cos6x) - \frac{1}{2}(\cos6x + \cos12x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos2x - \frac{1}{2}\cos12x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos2x - \cos12x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos2x = 1 \\ \cos12x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = (2m+1)\dfrac{\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \text{vô nghiệm.}$$

c) $\cos2x + 2\sin x\sin2x = 2\cos x \Leftrightarrow \cos2x + \cos x - \cos3x = 2\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos2x - (\cos3x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos2x - 2\cos2x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos2x(1 - 2\cos x) = 0.$

ĐS: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

d) $\cos5x.\cos x = \cos4x.\cos2x + 3\cos^2x + 1$

$\Leftrightarrow \cos6x + \cos4x = \cos6x + \cos2x + 6\cos^2x + 2$

$\Leftrightarrow \cos4x - \cos2x - 3(\cos2x + 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos4x - 4\cos2x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^22x - 2\cos2x - 3 = 0.$

e) $\cos4x + \sin3x.\cos x = \sin x.\cos3x \Leftrightarrow 2\cos4x + \sin4x + \sin2x = \sin4x - \sin2x$

$\Leftrightarrow \cos4x + \sin2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^22x - \sin2x - 1 = 0.$

f) $\sin(4x + \frac{\pi}{4})\cos6x = \sin(10x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) + \sin\left(10x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \sin(10x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \sin(10x + \frac{\pi}{4})$.

g) $(1 + \tan^2x)(1 + \sin2x) = 1 \Leftrightarrow 1 + \sin2x = \dfrac{1}{1 + \tan^2x} = \cos^2x$

$\Leftrightarrow \sin^2x + \sin2x = 0.$

h) $\tan(\frac{2\pi}{3} - x) + \tan(\frac{\pi}{3} - x) + \tan2x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\pi - 2x)}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)} + \tan2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x}{-\cos 2x+\frac{1}{2}}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=0 \Leftrightarrow \sin 2x\left(\frac{4}{1-2\cos 2x}+\frac{1}{\cos 2x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x.\frac{2\cos 2x+1}{(1-2\cos 2x)\cos 2x}=0 \Leftrightarrow \sin 2x(2\cos 2x+1)=0.$$

i) Ta có: $2^5\sin\frac{\pi x}{31}\cos\frac{\pi x}{31}\cos\frac{2\pi x}{31}\cos\frac{4\pi x}{31}\cos\frac{8\pi x}{31}\cos\frac{16\pi x}{31}=\sin\frac{32\pi x}{31}$

Pt $\Leftrightarrow \sin\frac{32\pi x}{31}=\frac{1}{32}.2^5\sin\frac{\pi x}{31}=\sin\frac{\pi x}{31}$.

Bài 3:

a) ĐS: $x=k\pi$; $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$; $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

Pt $\Leftrightarrow 2\sin^2 x.\sin 2x=\sqrt{3}\sin^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x(2\sin 2x-\sqrt{3})=0$.

b) ĐS: $x=(2k+1)\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$.

HD: $\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x=1-2\cos^2 x$.

c)

HD: ĐK: $\sin x\neq 0$, $\cot x\neq -1$.

Pt $\Leftrightarrow \frac{1}{1+\cot x}-\frac{1-\cot x}{2(1+\cot x)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

d) HD: $1-(2+\sqrt{2})\sin x=\frac{-2\sqrt{2}}{1+\cot^2 x} \Leftrightarrow 1-(2+\sqrt{2})\sin x=-2\sqrt{2}\sin^2 x$;

e) HD: $\tan^2 x=\frac{1-\cos x}{1-\sin x} \Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\cos x}{1-\sin x} \Leftrightarrow \frac{1-\cos x}{1-\sin x}\left(\frac{1+\cos x}{1+\sin x}-1\right)=0$

f) HD: $2(\sin^3 x+\cos^3 x)+\sin 2x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)+\sin 2x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(2-\sin 2x+\sin 2x)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

g) HD: $\cos x(1-\tan x)(\sin x+\cos x)=\sin x \Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)=\sin x$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\sin x$.

h) HD: $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\cos x}(\sin x+\cos x)^2=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x+\cos x)-(\cos x+\sin x)=0 \Leftrightarrow (\cos x+\sin x)(\cos 2x-1)=0$.

i) $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x \Leftrightarrow (2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=1-\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)(2\sin x-1)=0$

Bài 4:

a) $\sin x + \cos x - \frac{\sin 2x}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x) - \sin 2x - 3 = 0$ (dạng đối xứng)

b) $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x - (1 + \sqrt{2}) = 0$ (dạng đối xứng)

c) $\tan x + \tan 2x = \tan 3x \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x.\cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$

$\Leftrightarrow \sin 3x(\cos 3x - \cos x.\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x[\cos 3x - \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)] = 0 \Leftrightarrow \sin 3x(\cos 3x - \cos x) = 0.$

d) $\tan x + \tan 2x = \sin 3x.\cos x \Leftrightarrow \frac{\sin 3x}{\cos x.\cos 2x} = \sin 3x.\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin 3x.\cos 2x.\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 3x(\cos 2x.\frac{\cos 2x + 1}{2} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x(\cos^2 2x + \cos 2x - 2) = 0.$

e) $\frac{1 + \cos x}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = \sin x.\cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x.\cos\frac{x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin x - \cos\frac{x}{2}) = 0$.

f) $\tan(x - 45^o).\tan x.\tan(x + 45^o) =$

$$\frac{\sin(x - 45^o).\sin(x + 45^o)}{\cos(x - 45^o).\cos(x + 45^o)}\tan x = \frac{\cos[90^o - (x - 45^o)]\cos[90^o - (x + 45^o)]}{\cos(x - 45^o).\cos(x + 45^o)}\tan x$$

$=$

$$\frac{\cos(135^o - x).\cos(45^o - x)}{\cos(x - 45^o).\cos(x + 45^o)}\tan x = \frac{-\cos[180^o - (135^o - x)]\cos(x - 45^o)]}{\cos(x - 45^o).\cos(x + 45^o)}\tan x$$

$$= \frac{-\cos(x + 45^o).\cos(x - 45^o)}{\cos(x - 45^o).\cos(x + 45^o)}\tan x = -\tan x$$

$$\frac{4\cos^2 x}{\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}} = \frac{4\cos^2 x}{\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{s}}} = 4\cos x.\cos\frac{x}{2}.\sin\frac{x}{2} = \sin 2x$$

Pt $\Leftrightarrow -\tan x = \sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x.\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0.$

Chương II: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§1: HAI QUI TẮC ĐẾM CƠ BẢN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Qui tắc cộng:

- Qui tắc: Nếu đối tượng X có m cách chọn, đối tượng Y có n cách chọn và các cách chọn đối tượng X không trùng với bất cứ cách chọn nào của đối tượng Y. Khi đó, có m + n cách chọn một trong hai đối tượng đã cho.
- Tổng quát: Nếu đối tượng X_1 có m_1 cách chọn, đối tượng X_2 có m_2 cách chọn..., đối tượng X_n có m_n cách chọn và nếu các cách chọn đối tượng X_i không trùng với bất cứ cách chọn nào của đối tượng X_j nào ($\forall i \neq j;\ i, j = \overline{1,n}$). Khi đó có $m_1 + m_2 + ... + m_n$ cách chọn một trong các đối tượng đã cho.

2. Qui tắc nhân:

- Qui tắc: Nếu đối tượng X có m cách chọn, tương ứng với mỗi cách chọn đối tượng X, đối tượng Y có n cách chọn. Khi đó, có $m \times n$ cách chọn cặp đối tượng X và Y.
- Tổng quát: Nếu đối tượng X_1 có m_1 cách chọn, sau đó với mỗi cách chọn X_1, đối tượng X_2 có m_2 cách chọn, sau đó với mỗi cách chọn X_1, X_2, đối tượng X_3 có m_3 cách chọn... Cuối cùng với mỗi cách chọn $X_1, X_2, ... X_{n-1}$, đối tượng X_n có m_n cách chọn. Khi đó có $m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$ cách chọn dãy $X_1, X_2, ... X_n$.

B. CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: **Tìm số các phần tử.**

*** Phương pháp**: *Áp dụng các qui tắc cộng, qui tắc nhân.*

Bài 1. *Trong một lớp học có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn được:*

a) Một bạn học sinh của lớp đó.

b) Một đội song ca nam - nữ của lớp đó.

Giải:

a) Để chọn được một bạn học sinh của lớp, ta có thể áp dụng qui tắc cộng:

- Số cách chọn một học sinh nam là: 25 cách.
- Số cách chọn một học sinh nữ là : 20 cách.

Vậy số cách chọn được một học sinh của lớp là:

$$25 + 20 = 45 \text{ cách.}$$

b) Để chọn được một đội song ca từ lớp đó, ta có thể áp dụng qui tắc nhân:

- Số cách chọn một học sinh nam là: 25 cách.
- Tương ứng với mỗi cách chọn học sinh nam, số cách chọn một học sinh nữ là: 20 cách.

Vậy số cách chọn 1 đội song ca nam nữ từ lớp đó là:

$25 \times 20 = 500$ cách.

Bài 2. *Từ các số 3; 5; 7có thể viết được bao nhiêu số khác nhau có các chữ số khác nhau.*

Giải:

Ta xét các trường hợp sau và áp dụng qui tắc cộng:

- Số có 1 chữ số: có 3 số, đó là các số 3; 5; 7.
- Số có 2 chữ số: có 6 số, đó là các số 35; 37; 57; 53; 73; 75.
- Số có 3 chữ số: có 6 số, đó là các số 357; 375; 537; 573; 753; 735.

Vậy số các số cần tìm là: $3 + 6 + 6 = 15$ số.

Bài 3. *Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể viết được:*

a) Bao nhiêu số có 2 chữ số.

b) Bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau ? Trong đó có bao nhiêu số chẵn.

Giải:

a) Gọi số có 2 chữ số cần tìm là $\overline{ab}$.

Số cách chọn a là: 6 cách

Tương ứng với mỗi cách chọn *a*, số cách chọn *b* là 6 cách.

Vậy số các số có 2 chữ số cần tìm là $6 \times 6 = 36$ (số).

b) * Gọi số có 4 chữ số cần tìm là $\overline{abcd}$.

Số cách chọn *a* là: 6 cách.

Ứng với mỗi cách chọn *a*, số cách chọn *b* là 5 cách.

Ứng với mỗi cách chọn *a*, *b* số cách chọn *c* là 4 cách.

Ứng với mỗi cách chọn *a*, *b*, *c* số cách chọn *d* là 3 cách.

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau cần tìm là:

$6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ (số).

* Nếu $\overline{abcd}$ là số chẵn thì:

Số cách chọn *d* là 3 cách.

Số cách chọn *a* là 5 cách.

Số cách chọn *b* là 4 cách.

Số cách chọn *c* là 3 cách.

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau là:

$3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$ (số).

Nhận xét: * Vì trong tập hợp các chữ số đã cho không có chữ số 0, nên khi giải ta có thể chọn bất cứ đối tượng nào trước, tương ứng với mỗi cách chọn đó ta chọn tiếp các đối tượng còn lại (Vì việc chọn các đối tượng đó vai trò như nhau). Riêng đối với việc tìm số các số chẵn thì ưu tiên chọn các chữ số tận cùng trước, còn các chữ số còn lại vai trò như nhau thì được chọn theo thứ tự tuỳ ý.

* Nếu trong tập hợp các chữ số đã cho có **thêm chữ số 0 thì cầ** quan tâm chọn đối tượng ở vị trí đầu tiên trước (phải **khác 0) sau đó chọ** các đối tượng còn lại.

Bài 4. *Cho các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Từ các chữ* ***số đó ta có thể thàn*** *lập được:*

a) *Bao nhiêu số có 5 chữ số ?*

b) *Bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau ? trong đó có* ***bao nhiêu số chia hế*** *cho 5 ? bao nhiêu số chẵn ?*

c) *Bao nhiêu số có 5 chữ số, trong đó các chữ số cách* ***đều chữ số đứng*** *giữa thì giống nhau?*

Giải:

Gọi số có 5 chữ số là $\overline{abcde}$.

a) Số cách chọn *a* là 6 cách.
Số cách chọn *b* là 7 cách.
Số cách chọn *c* là 7 cách.
Số cách chọn *d* là 7 cách.
Số cách chọn *e* là 7 cách.
Vậy số các số có 5 chữ số cần tìm là: 6 × 7 × 7 × 7 × 7 = **8406 (số).**

b) * Số có 5 chữ số khác nhau:
Số cách chọn *a* là 6 cách.
Số cách chọn *b* là 6 cách.
Số cách chọn *c* là 5 cách.
Số cách chọn *d* là 4 cách.
Số cách chọn *e* là 3 cách.
Vậy số các số có 5 chữ số khác nhau cần tìm là:

6 × 6 × 5 × 4 × 3 = 2160 (số).

* Số chia hết cho 5:

Vì $\overline{abcde} \vdots 5$ nên *e* có 2 cách chọn:

+ Nếu *e* = 0, khi đó:
Số cách chọn *a* là 6 cách.
Số cách chọn *b* là 5 cách.
Số cách chọn *c* là 4 cách.
Số cách chọn *d* là 3 cách.
Vậy số các số có 5 chữ số khác nhau dạng $\overline{abcd0}$ **là:**

6 × 5 × 4 × 3 = 360 (số).

+ Nếu *e* = 5, khi đó:
Số cách chọn *a* là 5 cách.
Số cách chọn *b* là 5 cách.
Số cách chọn *c* là 4 cách.
Số cách chọn *d* là 3 cách.

Vậy số các số có 5 chữ số khác nhau dạng $\overline{abcd5}$ là:

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300 \text{ (số)}.$$

Áp dụng qui tắc cộng, ta có số các số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là: 360 + 300 = 660 (số).

- **Số các số chẵn:**

+ Trước hết ta tìm số các số lẻ.

Số cách chọn e là 3 cách.

Số cách chọn a là 5 cách.

Số cách chọn b là 5 cách.

Số cách chọn c là 4 cách.

Số cách chọn d là 3 cách.

Vậy số các số lẻ có 5 chữ số khác nhau là:

$$3 \times 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 900 \text{ (số)}.$$

+ Suy ra số các số chẵn có 5 chữ số khác nhau là:

$$2160 - 900 = 1260 \text{ (số)}.$$

Nhận xét: Để tìm số các số chẵn có 5 chữ số khác nhau ta có thể tìm trực tiếp bằng cách làm như tìm số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5. Tức là chia ra hai trường hợp $e = 0$ và $e \neq 0$. Tuy nhiên việc tìm số các số lẻ được thực hiện đơn giản hơn nên ta sẽ tìm số các số lẻ rồi suy ra số các số chẵn.

c) Vì số cần tìm có các chữ số cách đều chữ số đứng ở giữa thì giống nhau nên ta có $a = e$, $b = d$. Hay số đó có dạng $\overline{abcbd}$.

Số cách chọn a là 6 cách.

Số cách chọn b là 7 cách.

Số cách chọn c là 7 cách.

Vậy số các số cần tìm là: $6 \times 7 \times 7 = 294$ (số).

Bài 5. *Có thể viết được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và:*

a) Là số chẵn lớn hơn 5000?

b) Nằm trong khoảng (2000, 4000)?

Giải: Gọi số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm là $\overline{abcd}$.

a) Vì $\overline{abcd} > 5000$ nên a có 5 cách chọn ($a \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$)

- Nếu $a = 5$ hoặc $a = 7$ hoặc $a = 9$

Khi đó: Số cách chọn d là 5 cách.

Số cách chọn b là 8 cách.

Số cách chọn c là 7 cách.

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau có dạng $\overline{5bcd}$, $\overline{7bcd}$, $\overline{9bcd}$ là: $3 \times 5 \times 8 \times 7 = 840$ (số).

- Nếu $a = 6$ hoặc $a = 8$.

Khi đó: Số cách chọn d là 4 cách.

Số cách chọn b là 8 cách.
Số cách chọn c là 7 cách.

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau có dạng $\overline{6bcd}$, $\overline{8bcd}$ là:

$2 \times 4 \times 8 \times 7 = 448$ (số).

Do đó, số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau lớn hơn 5000 là:

$840 + 448 = 1288$ (số).

b) Vì $\overline{abcd} \in (2000, 4000)$ nên a có thể chọn là 2 hoặc 3.

Vậy: Số cách chọn a là 2 cách.
Số cách chọn b là 9 cách.
Số cách chọn c là 8 cách.
Số cách chọn d là 7 cách.

Do đó số các số có 4 chữ số khác nhau thuộc khoảng (2000, 4000) là:

$2 \times 9 \times 8 \times 7 = 1008$ (số).

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Trong một nhóm học sinh gồm có 8 học sinh có học lực trung bình, 7 học sinh có học lực khá và 5 học sinh có học lực giỏi. Có bao nhiêu cách để chọn được từ nhóm đó:

a) Một học sinh có học lực thế nào cũng được.
b) Hai học sinh có học lực khác nhau.
c) Ba học sinh có học lực khác nhau từng đôi một.

Bài 2: Một công ty có 5 cổng ra vào. Hỏi một người khách đến công ty thì có thể chọn được:

a) Bao nhiêu cách vào ra công ty đó?
b) Bao nhiêu cách vào ra công ty đó bằng 2 cổng khác nhau (cổng ra khác cổng vào)?

Bài 3: Số điện thoại của một huyện A gồm có 6 chữ số và bắt đầu bởi 2 số đầu tiên 85. Hỏi huyện đó có tối đa là bao nhiêu máy điện thoại?

Bài 4: Từ các số tự nhiên 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.

a) Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số?
b) Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau?
c) Có bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau nhỏ hơn 4000?
d) Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau ? Trong đó có bao nhiêu số không có tận cùng bằng 5.
e) Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.
f) Có bao nhiêu số gồm 9 chữ số, trong đó chữ số 5 phải có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần?

Bài 5: Từ tập hợp các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

a) Có bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau ? Trong đó có bao nhiêu số mà không được bắt đầu bởi các số 123?
b) Có bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau mà trong đó chữ số 1 và 5 luôn đứng cạnh nhau?
c) Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và không lớn hơn 4567?

Bài 6: Từ tập hợp các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
a) Có bao nhiêu số có 5 chữ số.
b) Có bao nhiêu số có 5 chữ số có tận cùng bởi chữ số 6 và chia hết cho 3.

§2: HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Hoán vị:

- Định nghĩa: Cho tập hợp *A* gồm *n* phần tử ($n \geq 1$). Mỗi cách sắp thứ tự *n* phần tử của tập hợp *A* được gọi là một hoán vị của *n* phần tử đó
- Công thức tính: Số hoán vị của *n* phần tử kí hiệu P_n.

$$P_n = n(n-1)...2 \times 1 = n!$$

2. Chỉnh hợp:

- Định nghĩa: Cho tập hợp *A* gồm *n* phần tử. Một bộ gồm *k* phần tử sắp thứ tự của tập hợp *A* được gọi là một chỉnh hợp chập *k* của *n* phần tử ($1 \leq k \leq n$).
- Công thức tính: Số chỉnh hợp chập *k* của *n* kí hiệu là A_n^k.

$$A_n^k = n(n-1)\ ...\ (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chú ý: qui ước $0! = 1$.

3. Tổ hợp:

- Định nghĩa: Cho tập hợp *A* gồm *n* phần tử. Một tập con gồm *k* phần tử của *A* được gọi là một tổ hợp chập *k* của *n* phần tử đã cho ($0 \leq k \leq n$).
- Công thức tính: Số tổ hợp chập *k* của *n* kí hiệu là C_n^k.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: **Tính số các hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp.**
*** Phương pháp:**

Áp dụng các công thức tính P_n, A_n^k, C_n^k phối hợp với quy tắc cộng và nhân.

Bài 1: *Có 5 bạn học sinh được xếp thành một hàng ngang. Có bao nhiêu cách sắp xếp như vậy?*

Giải:

Số cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng ngang chính là số các hoán vị của 5 phần tử. Vậy số các cách sắp xếp đó là:

$$P_5 = 5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120 \text{ (cách)}.$$

Bài 2: *Có 5 quyển sách tham khảo môn Toán, 4 quyển sách tham khảo môn Lý và 6 quyển sách tham khảo môn Hoá. Xếp những quyển sách đó vào một ngăn trên giá sách theo từng môn. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp như vậy?*

Giải:

Có 3 môn nên có 3! cách sắp xếp theo môn.

Trong đó: + Có 5! cách sắp xếp sách tham khảo môn Toán.
+ Có 4! cách sắp xếp sách tham khảo môn Lý.
+ Có 6! cách sắp xếp sách tham khảo môn Hoá.

Vây, số cách sắp xếp cần tìm là:

$$3!\ 5!\ 4!\ 6! = 12441600 \text{ (cách)}.$$

Bài 3: *Trong một đám cưới, cô dâu và chú rể mời 4 người bạn đứng thành 1 hàng để chụp ảnh với mình. Có bao nhiêu cách sắp xếp.*

a) Cô dâu đứng cạnh chú rể.

b) Cô dâu không đứng cạnh chú rể.

c) Cô dâu đứng bên trái chú rể.

Giải:

a) Số cách chọn vị trí để cô dâu và chú rể đứng cạnh nhau là:

$$5 . 2! = 10 \text{ (cách)}.$$

Tương ứng với mỗi cách sắp xếp đó, số cách xếp 4 người bạn vào 4 vị trí còn lại là: $4! = 24$ (cách).

Vậy số cách sắp xếp để cô dâu đứng cạnh chú rể là:

$$10 \times 24 = 240 \text{ (cách)}.$$

b) Số cách sắp xếp 6 người thành một hàng ngang là:

$$6! = 720 \text{ (cách)}.$$

Vậy số cách sắp xếp để cô dâu không đứng cạnh chú rể là:

$$6! - 240 = 480 \text{ (cách)}.$$

c) Số cách sắp xếp mà cô dâu đứng bên trái ngay cạnh chú rể là:

$$5! = 120 \text{ (cách)}$$

Số cách sắp xếp mà cô dâu đứng bên trái không cạnh chú rể là:

$$\frac{480}{2} = 240 \text{ (cách)}.$$

Vậy số cách sắp xếp để cô dâu đứng bên trái chú rể là:

$$120 + 240 = 360 \text{ (cách)}.$$

Bài 4: *Cho các số 1; 2; 3; 4; 5; 6.*

a) Có thể viết được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau từ tập các chữ số trên? Có bao nhiêu số chẵn?

b) *Tính tổng của tất cả các số tạo thành ở câu a.*

Giải:

a) * Một số có 6 chữ số được thành lập từ tập các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; là một hoán vị của 6 phần tử. Vậy số các số đó là:

$$6! = 720 \text{ (số)}.$$

* Số cách chọn chữ số tận cùng là 3 cách.

Số cách chọn các số còn lại là 5! cách.

Vậy số các số chẵn cần tìm là: $3 \times 5! = 360$ (số).

b) Ta có ứng với mỗi số a của tập các số tìm được ở trên sẽ có một và chỉ một số a' cũng của tập hợp đó, sao cho:

$$a + a' = 777777.$$

Chẵng hạn số $a = 123456$ thì $a' = 654321$...

Và sẽ có: $\frac{720}{2}$ cặp số như vậy. Do đó tổng của các số tìm được sẽ là:

$$360 \times 777777 = 279999720.$$

Bài 5: *Cho các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.*

a) Có thể viết được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau ? Trong đó có bao nhiêu số chẵn ? Bao nhiêu số chia hết cho 5 ?

b) Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

c) Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau nhỏ hơn 4000.

Giải:

a) * Số có 4 chữ số khác nhau.

Số cách chọn chữ số hàng nghìn: 7 cách.

Số cách chọn 3 chữ số còn lại: $A_7^3 = 210$.

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau cần tìm là:

$$7 \times 210 = 1470 \text{ (số)}.$$

* Số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau.

Vì số cần tìm là chẵn nên chữ số tận cùng có thể là: 0;2;4;6.

+ Nếu chữ số tận cùng khác 0 thì số các số cần tìm:

$$3 \cdot 6 \cdot A_6^2 = 540 \text{ (số)}.$$

+ Nếu chữ số tận cùng là 0 thì số các số cần tìm là:

$$1 \cdot 7 \cdot A_6^2 = 210 \text{ (số)}.$$

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau cần tìm là:

$$540 + 210 = 750 \text{ (số)}.$$

Nhận xét: Ở đây việc tìm số các số lẻ thực hiện thuận lợi hơn so với việc tìm các số chẵn, vì thế đối với bài toán này ta có thể tiến hành tìm các số lẻ từ đó suy ra các số chẵn.

Số các số lẻ có 4 chữ số khác nhau là: $4 . 6 . A_6^2 = 720$.

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau cần tìm là:

$1470 - 720 = 750$ (số)

* Số các số có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5.

Vì số cần tìm chia hết cho 5 nên chữ số tận cùng có thể là 0 hoặc 5.

+ Nếu chữ số tận cùng là 0 thì số các số có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:

$1 . 7 . A_6^2 = 210$ (số).

+ Nếu chữ số tận cùng là 5 thì số các số có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:

$1 . 6 . A_6^2 = 180$ (số).

Vậy số các số cần tìm có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:

$210 + 180 = 390$ (số).

b) Số cách chọn vị trí chữ số 5 là 4.

Số cách chọn 3 chữ số còn lại (có cả chữ số 0 đứng đầu) là A_7^3

Hơn nữa ta lại có: $3 . A_6^2 = 90$ số có 4 chữ số khác nhau nhất thiết có mặt chữ số 5 và chữ số 0 đứng đầu.

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau nhất thiết có mặt chữ số 5 là:

$4 . A_7^3 - 3 . A_6^2 = 840 - 90 = 750$ (số).

c) Vì số cần tìm nhỏ hơn 4000 nên chữ số hàng nghìn có 3 cách chọn.

Số cách chọn 3 chữ số còn lại là: $A_7^3 = 210$.

Vậy số các số cần tìm có 4 chữ số khác nhau nhỏ hơn 4000 là:

$3 \times 210 = 630$ (số).

Bài 6: *Với các số 0; 1; 3; 6; 9 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau và:*

a) Không bắt đầu bởi số 13.

b) Là số chẵn lớn hơn 5000.

c) Chia hết cho 3.

Giải:

a) Số các số có 4 chữ số khác nhau có thể lập được từ các chữ số trên là:

$4 . A_4^3 = 96$ (số)

Số các số có 4 chữ số khác nhau bắt đầu bởi số 13 là:

$A_3^2 = 6$ (số).

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau không bắt đầu bởi số 13 là:

$96 - 6 = 90$ (số).

b) **Vì số cần tìm lớn** hơn 5000 nên chữ số hàng nghìn có thể chọn chữ số 6 **hoặc 9.**

Nếu chữ số hàng nghìn là 6 thì số các số cần tìm là:

$1 \,.\, 1 \,.\, A_3^2 = 6$ (số).

Nếu chữ số hàng nghìn là 9 thì số các số cần tìm là:

$1 \,.\, 2 \,.\, A_3^2 = 12$ (số).

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau lớn hơn 5000 là:

$6 + 12 = 18$ (số).

c) **Vì một số chia hết** cho 3 khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết **cho 3. Trong tập hợp** các số 0; 1; 3; 6; 9 chỉ có số 1 không chia hết cho 3. **Vậy số cần tìm** chia hết cho 3 khi các chữ số của nó thuộc tập $\{0; 3; 6; 9\}$. **Có 4! số có** 4 chữ số khác nhau (có thể bắt đầu với chữ số 0) và có 3! **số có 4 chữ số khác** nhau bắt đầu là chữ số 0 từ tập hợp $\{0; 3; 6; 9\}$. Vậy **số các số có 4** chữ số khác nhau và chia hết cho 3 là:

$4! - 3! = 18$ (số).

Bài 7: *Có một hộp trong đó có đựng 7 quả cầu màu đỏ và 3 quả cầu màu xanh. Lấy từ trong hộp ra 3 quả cầu.*

a) ***Có bao nhiêu*** *cách lấy như vậy?*

b) ***Có bao nhiêu*** *cách lấy để trong đó có 2 quả cầu đỏ?*

c) ***Có bao nhiêu*** *cách lấy để trong đó có nhiều nhất 2 quả cầu đỏ?*

d) ***Có bao nhiêu*** *cách lấy để trong đó có ít nhất 1 quả cầu đỏ?*

Giải:

a) **Mỗi cách lấy** 3 quả cầu từ hộp là một chỉnh hợp chập 3 của 10. Số các **cách lấy đó là:** $C_{10}^3 = 120$ (cách).

b) **Số cách chọn** 2 quả cầu đỏ $C_7^2 = 21$.

Số cách chọn 1 quả cầu xanh $C_3^1 = 3$.

Vậy số cách lấy để có được 2 quả cầu đỏ là:

$21 \times 3 = 63$(cách).

c) **Để chọn được** nhiều nhất 2 quả cầu đỏ, có các trường hợp sau xảy ra:

+ Có 2 quả cầu đỏ có: $C_7^2 \,.\, C_3^1 = 63$ (cách).

+ Có 1 quả cầu đỏ có: $C_7^1 \,.\, C_3^2 = 21$ (cách).

+ Không có quả cầu đỏ nào: $C_3^3 = 1$ (cách).

Vậy số cách để lấy được nhiều nhất 2 quả cầu đỏ là:

$63 + 21 + 1 = 85$ (cách).

d) **Để lấy được ít** nhất một quả cầu đỏ, có các trường hợp sau:

+ Có 1 quả cầu đỏ có: $C_7^1 \,.\, C_3^2 = 21$ (cách).

+ Có 2 quả cầu đỏ có: $C_7^2 \,.\, C_3^1 = 63$ (cách).

+ Có 3 quả cầu đỏ có: $C_7^3 = 35$ (cách).

Vậy số cách để lấy được ít nhất một quả cầu đỏ là:

$21 + 63 + 35 = 119$ (cách).

Nhận xét: Để tính số cách lấy được ít nhất 1 quả cầu đỏ ngoài cách trên ta có thể thực hiện:

- Tìm số cách lấy không có ít nhất 1 quả cầu đỏ (tức là cả 3 đều xanh): $C_3^3 = 1$.
- Suy ra số cách lấy để có được ít nhất 1 quả cầu đỏ là:

$$C_{10}^3 - C_3^3 = 120 - 1 = 119 \text{ (cách)}.$$

Bài 8: *Một lớp có 20 học sinh nữ trong đó có bạn Mai và 16 học sinh nam trong đó có bạn Thắng.*

1) Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh của lớp?
  a) Có bao nhiêu cách chọn như vậy?
  b) Có bao nhiêu cách để có được 3 học sinh cùng phái?
  c) Có bao nhiêu cách để có được 3 học sinh khác phái?
2) Chia lớp thành 4 tổ, mỗi tổ có 9 học sinh
  a) Có bao nhiêu cách chia như vậy ?
  b) Có bao nhiêu cách chia để số học sinh nam và nữ ở các tổ đều nhau.
3) Chọn một ban cán sự lớp gồm 5 em học sinh, ít nhất có 2 nam và 2 nữ.
  a) Có bao nhiêu cách chọn như vậy?
  b) Có bao nhiêu cách chọn nếu Thắng và Mai không chịu làm việc chung?
  c) Có bao nhiêu cách chọn nếu Thắng và Mai không chịu rời nhau?

Giải:

1) a) Số cách chọn 3 học sinh của lớp: $C_{36}^3 = 7140$.

b) * Số cách chọn để được 3 học sinh nam: $C_{20}^3 = 1140$.

* Số cách chọn để được 3 học sinh nữ: $C_{16}^3 = 560$.

Vậy số cách chọn để được 3 học sinh cùng phái là:

$$1140 + 560 = 1700.$$

c) Số cách chọn để được 3 học sinh khác phái:

$$7140 - 17000 = 5440.$$

Nhận xét: Để chọn được 3 học sinh khác phái, ngoài cách tính trên ta có thể sử dụng cách tính trực tiếp đó là tính tổng số cách chọn được hoặc hai học sinh nam và 1 học sinh nữ hoặc 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ, tức là bằng:

$$C_{20}^2 . C_{16}^1 + C_{20}^1 . C_{10}^2 = 5440.$$

2) a) * Số cách chọn tổ thứ 1: chọn 9 học sinh bất kỳ từ 36 học sinh của lớp.

Số cách chọn đó là: C_{36}^9

* Số cách chọn tổ thứ 2: chọn 9 học sinh bất kỳ từ 27 học sinh còn lại.

Số cách chọn đó là: C_{27}^{9}.

* Số cách chọn tổ thứ 3: chọn 9 học sinh bất kỳ từ 18 học sinh còn lại.

Số cách chọn đó là: C_{18}^{9}.

* Số cách chọn tổ thứ 4: chọn 9 học sinh còn lại.

Số cách chọn đó là: C_{9}^{9}.

Số cách chia lớp thành 4 tổ mỗi tổ có 9 người tùy ý là:

$C_{36}^{9}.C_{27}^{9}.C_{18}^{9}.C_{9}^{9}$ (cách).

b) Để số học sinh nam và nữ ở các tổ đều nhau thì mỗi tổ có 5 học sinh nữ và 4 học sinh nam:

* Số cách chọn tổ thứ 1: $C_{20}^{5}.C_{16}^{4}$.

* Số cách chọn tổ thứ 2: $C_{15}^{5}.C_{12}^{4}$.

* Số cách chọn tổ thứ 3: $C_{10}^{5}.C_{8}^{4}$.

* Số cách chọn tổ thứ 4: $C_{5}^{5}.C_{4}^{4}$.

Vậy số cách chia lớp thành 4 tổ trong đó số học sinh nam và nữ ở các tổ đều nhau sẽ là:

$C_{20}^{5}.C_{16}^{4}.C_{15}^{5}.C_{12}^{4}.C_{10}^{5}.C_{8}^{4}.C_{5}^{5}.C_{4}^{4}$ (cách)

3) a) Để chọn được ít nhất là 2 nam và 2 nữ vào ban cán sự lớp thì có 2 trường hợp sau đây xảy ra:

* Chọn 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Số cách chọn đó là:

$C_{16}^{2}.C_{20}^{3}$.

* Chọn 2 học sinh nữ và 3 học sinh nam. Số cách chọn đó là:

$C_{20}^{2}.C_{16}^{3}$.

Vậy số cách chọn ban cán sự gồm 5 người trong đó có ít nhất 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ là:

$$C_{16}^{2}C_{20}^{3} + C_{20}^{2}C_{16}^{3} = 120\ .\ 1140 + 190\ .\ 560 = 243200.$$

b) * Trước hết tìm cách chọn Thắng và Mai cùng làm việc chung. Khi đó, số cách chọn 3 học sinh còn lại vào ban cán sự lớp sẽ có 2 trường hợp xảy ra:

- Số cách chọn 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ là:

$C_{15}^{1}.C_{19}^{2}$.

- Số cách chọn 1 học sinh nữ và 2 học sinh nam là:

$C_{19}^{1}.C_{15}^{2}$.

Như vậy, số cách chọn 1 ban cán sự lớp gồm 5 học sinh, trong đó ít nhất 2 nữ và 2 nam, đồng thời Thắng và Mai được làm việc chung là:

$$C_{15}^{1}.C_{19}^{2} + C_{19}^{1}.C_{15}^{2} = 15\ .\ 171 + 19\ .\ 105 = 4560.$$

Suy ra, số cách chọn ban cán sự gồm 5 học sinh có ít nhất 2 nam, 2 nữ trong đó Thắng và Mai không chịu làm việc chung là:

$$243200 - 4560 = 238640.$$

Nhận xét: Ngoài cách tính trên ta có thể sử dụng cách tính trực tiếp gồm 3 trường hợp:

- Số cách chọn ban cán sự lớp có ít nhất 2 nam, 2 nữ trong đó Thắng tham gia ban cán sự còn Mai không tham gia:

$$C^1_{15}.C^3_{19} + C^2_{15}.C^2_{19} = 14535 + 17955 = 32490.$$

- Số cách chọn ban cán sự lớp có ít nhất 2 nam, 2 nữ. Trong đó Mai tham gia ban cán sự còn Thắng không tham gia:

$$C^1_{19}.C^3_{15} + C^2_{19}.C^2_{15} = 8645 + 17955 = 26600.$$

- Số cách chọn ban cán sự lớp có ít nhất 2 nam, 2 nữ. Trong đó cả Thắng và Mai không tham gia:

$$C^2_{15}.C^3_{19} + C^2_{19}.C^3_{15} = 179550.$$

Vậy số cách chọn cần tìm là:

$$32490 + 26600 + 179550 = 238640.$$

c) - Số cách chọn để Thắng và Mai đều tham gia vào ban cán sự lớp là:

$$C^1_{15}.C^2_{19} + C^1_{19}.C^2_{15} = 4560.$$

- Số cách chọn để Thắng và Mai đều không tham gia vào ban cán sự lớp là:

$$C^2_{15}.C^3_{19} + C^2_{19}.C^3_{15} = 179550.$$

- Số cách chọn ban cán sự lớp gồm 5 người có ít nhất 2 nam và 2 nữ, trong đó Thắng và Mai không chịu rời nhau là:

$$4560 + 179550 = 184110.$$

Dạng 2: **Rút gọn các biểu thức - chứng minh các đẳng thức.**

*** Phương pháp:**

- *Áp dụng các công thức tính* P_n, A^k_n, $\mathbf{C}^k_n$.
- *Thực hiện các phép biến đổi để rút gọn biểu thức, hoặc chuyển biểu thức vế này thành vế kia.*
- *Khi thực hiện biến đổi một số bài toán cần sử dụng thêm tính chất*

$$C^k_n = C^{n-k}_n; \quad C^{k-1}_{n-1} + C^k_{n-1} = C^k_n.$$

Bài 1: *Rút gọn các biểu thức sau:*

a) $M = \dfrac{P_6(n+1)}{P_{n-2}}.\dfrac{n.P_{n-1}}{(n-1)(n^2+n)}$ *Với* $n \in N$, $n \geq 2$.

b) $N = \dfrac{A^6_n + A^5_n}{A^4_n}$ *Với* $n \in N$, $n \geq 6$.

c) $P = \dfrac{P_n}{(n-3)!\,A_n^2} - \dfrac{P_{n+1}}{(n+2)!}$

d) $Q = \dfrac{P_{n+2}}{A_n^k.P_{n-k}} + \dfrac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$

e) $R = \dfrac{C_{100}^{95} + C_{1000}^{995}}{C_{1000}^{5} + C_{100}^{5}}$

Giải:

a)

$$M = \frac{6!(n+1)\ .n.(n-1)!}{(n-2)!\,(n-1).(n^2+n)} = \frac{6!(n-1)!n.(n+1)}{(n-2)!\,(n-1).n(n+1)}$$

$$= \frac{6!(n+1)!}{(n+1)!} = 6! = 720$$

b) $$N = \frac{\dfrac{n!}{(n-6)!} + \dfrac{n!}{(n-5)!}}{\dfrac{n!}{(n-4)!}}$$

$$= \frac{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n + (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

$$= \frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n\,(n-5+1)}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = (n-4)^2.$$

c)

$$P = \frac{n!}{(n-3)!\,\dfrac{n!}{(n-2)!}} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{(n-2)!}{(n-3)!} - \frac{(n+1)!}{(n+2)!}$$

$$= n - 2 - \frac{1}{n+2} = \frac{n^2-5}{n+2}$$

d) Ta có: $\dfrac{P_{n+2}}{A_n^k.P_{n-k}} = \dfrac{(n+2)!}{\dfrac{n!}{(n-k)!}(n-k)!} = (n+1)(n+2)$

Mặt khác:

$$\frac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}} = \frac{C_{15}^8 + C_{15}^9 + C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}} = \frac{C_{16}^9 + C_{16}^{10}}{C_{17}^{10}} = \frac{C_{17}^{10}}{C_{17}^{10}} = 1$$

Vậy $Q = (n+1)\,.\,(n+2) + 1 = n^2 + 3n + 3$.

e) Ta có: $C_{100}^{95} = C_{100}^{5};\ C_{1000}^{995} = C_{1000}^{5}$

Vậy: $R = \dfrac{C_{100}^{95} + C_{1000}^{995}}{C_{1000}^{5} + C_{100}^{5}} = 1.$

Bài 2: *Chứng minh rằng:*

a) $nC_{m+n}^{m} = (m+1)C_{m+n}^{m+1} \quad \forall m, n \in Z^{+}$.

b) $C_{n}^{m+1} + C_{n}^{m-1} + 2C_{n}^{m} = C_{n+2}^{m+1} \quad \forall m, n \in Z^{+};\ n \geq m+1$.

c) $C_{n}^{k} + 3C_{n}^{k-1} + 3C_{n}^{k-2} + C_{n}^{k-3} = C_{n+3}^{k}$.

Giải:

a) Ta có:

$$VT = (m+1)C_{m+n}^{m+1} = (m+1)\,.\frac{(m+n)!}{(m+1)!(m+n-m-1)!}$$

$$= \frac{(m+n)!}{m!(n-1)!} = n\,.\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

$$= n.\frac{(m+n)!}{m!(m+n-m)!} = nC_{m+n}^{m} = VP \quad \text{(đpcm).}$$

b) Ta có: $C_{n}^{m+1} + C_{n}^{m} = C_{n+1}^{m+1}; \quad C_{n}^{m} + C_{n}^{m-1} = C_{n+1}^{m}$

Suy ra: $VT = (C_{n}^{m+1} + C_{n}^{m}) + (C_{n}^{m} + C_{n}^{m-1}) = C_{n+1}^{m+1} + C_{n+1}^{m}$

$= C_{n+2}^{m+1} = VP$ (đpcm)

c) Ta có:

$$VT = C_{n}^{k} + C_{n}^{k-1} + 2(C_{n}^{k-1} + C_{n}^{k-2}) + (C_{n}^{k-2} + C_{n}^{k-3})$$

$$= C_{n+1}^{k} + 2C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2} = (C_{n+1}^{k} + C_{n+1}^{k-1}) + (C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2})$$

$$= C_{n+2}^{k} + C_{n+2}^{k-1} = C_{n+3}^{k} = VP \text{ (đpcm).}$$

Dạng 3: **Giải phương trình - bất phương trình - hệ phương trình liên quan đến các yếu tố P_n, A_n^k, C_n^k.**

*** Phương pháp:**

- *Áp dụng các công thức tính* P_n, A_n^k, C_n^k.
- *Thay các biểu thức đó vào các phương trình, bất phương trình hay hệ phương trình đã cho rồi thực hiện biến đổi và rút gọn các biểu thức để đưa về các dạng phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đã học.*

Chú ý: Điều kiện trong các công thức.

$$P_n = n! \quad n \in N$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad k, n \in N;\ 0 \leq k \leq n.$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad k, n \in N;\ 0 \leq k \leq n.$$

Bài 1: *Giải các phương trình sau:*

a) $\dfrac{10P_{n-1}}{P_{n+1}} - 4 = \dfrac{2}{n+1}$ *b)* $A_n^2 - A_n^1 = 3.$

c) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \dfrac{7}{2}x.$ *d)* $A_y^3 - C_y^{y-2} = 14y.$

e) $3C_{x+1}^2 + P_2x = 4A_x^2.$

Giải:

a) Điều kiện $n \in N;\ n \geq 1$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{10(n-1)!}{(n+1)!} - 4 = \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow \frac{10}{n(n+1)} - 4 = \frac{2}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 10 - 4n(n+1) = 2n \Leftrightarrow 2n^2 + 3n - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ n = \dfrac{5}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $n = 1$.

b) Điều kiện $n \in N;\ n \geq 2$ khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = 3$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n - n - 3 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \text{ (loại)} \\ n = 3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $n = 3$.

c) Điều kiện $x \in N;\ x \geq 3$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{x!}{1!(x-1)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{x!}{3!(x-3)!} = \frac{7}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{(x-1)x}{2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{6} = \frac{7}{2}x$$

$$\Leftrightarrow 6 + 3x - 3 + x^2 - 3x + 2 = 21 \text{ (Vì } x \geq 3\text{)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

d) Điều kiện $y \in N;\ y \geq 3$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{y!}{(y-3)!} - \frac{y!}{(y-2)!(y-y+2)!} = 14y$$

$$\Leftrightarrow y(y-1)(y-2) + \frac{y(y-1)}{2} = 14y \Leftrightarrow 2y^2 - 6y + 4 + y - 1 = 28$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 5y - 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = -\dfrac{5}{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $y = 5$

e) Điều kiện $x\in N$; $x\ge 2$. Khi đó phương trình trở thành:

$$3\frac{(x+1)!}{2!(x-1)!}+2!x=4\frac{x!}{(x-2)!}$$

$$\Leftrightarrow 3x(x+1)+4x=8(x-1)x \Leftrightarrow 5x^2-15x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (loại)\\ x=3\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

f) Điều kiện $x\in N$ và $\begin{cases}0\le x\le 14\\ 0\le x+2\le 14\\ 0\le x+1\le 14\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 12,\ x\in N.$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{14!}{x!(14-x)!}-\frac{14!}{(x+2)!(12-x)!}=\frac{14!}{(x+1)!(13-x)!}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)-(13-x)(14-x)=(x+2)(14-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2+18x-208=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8\\ x=-26\ (loại)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=8$.

Bài 2: *Giải các bất phương trình sau:*

a) $\dfrac{A_{x+4}^4}{P_{x+2}}<\dfrac{15}{P_{x-1}}$.

b) $\dfrac{1}{2}A_{2x}^2-A_x^2\le\dfrac{6}{x}C_x^3+10$.

c) $C_{n-1}^4-C_{n-1}^3-\dfrac{5}{4}A_{n-2}^2\le 0$.

d) $C_{10}^{x-1}>2C_{10}^x$.

Giải:

a) Điều kiện $x\in N$; $x\ge 1$. Khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{\frac{(x+4)!}{x!}}{(x+2)!}<\frac{15}{(x-1)!} \Leftrightarrow \frac{(x+4)!}{x!(x+2)!}<\frac{15}{(x-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+4)}{x!}<\frac{15}{(x-1)!} \Leftrightarrow (x+3)(x+4)<15x$$

$$\Leftrightarrow x^2-8x+12<0 \Leftrightarrow 2<x<6.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=\{3;4;5\}$.

b) Điều kiện $x\in N$; $x\ge 3$. Khi đó bất phương trình trở thành:

$$\frac{1}{2}\frac{(2x)!}{(2x-2)!}-\frac{x!}{(x-2)!}\le\frac{6}{x}\frac{x!}{3!(x-3)!}+10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}2x(2x-1)-(x-1)x\le(x-2)(x-1)+10 \Leftrightarrow 3x\le 12 \Leftrightarrow x\le 4$$

Từ đó suy ra $3\le x\le 4$; $x\in N$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3; 4\}$.

c) Điều kiện $n \in N$; $n \geq 5$. Khi đó bất phương trình trở thành:

$$\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} - \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} - \frac{5}{4}\,\frac{(n-2)!}{(n-4)!} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-2)!}{(n-5)!}\left(\frac{n-1}{4!} - \frac{n-1}{3!(n-4)} - \frac{5}{n-4}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-4) - 4(n-1) - 5.3!}{4!(n-4)} \leq 0$$

$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 22 \leq 0$ (vì $n \geq 5$ nên $4!(n-4) > 0$) $\Leftrightarrow -2 \leq n \leq 11$.

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm $5 \leq n \leq 11$; $n \in N$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.

d) Điều kiện $y \in N$; $1 \leq y \leq 10$. Khi đó bất phương trình trở thành:

$$\frac{10!}{(y-1)!(11-y)!} > 2\frac{10!}{y!(10-y)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{y!(11-y)!} > 2\frac{(11-y)}{y!(11-y)!}$$

$$\Leftrightarrow y > 2(11-y) \qquad \Leftrightarrow y > \frac{22}{3}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\frac{22}{3} < y \leq 10$; $y \in N$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{8; 9; 10\}$.

Bài 3: *Tìm số hạng âm trong dãy:* $x_1; x_2; \ldots; x_n$. *Với:* $x_n = C_{n+5}^4 - \frac{143P_{n+5}}{96P_{n+3}}$.

Giải:

Ta có: $x_n < 0 \Leftrightarrow C_{n+5}^4 - \frac{143P_{n+5}}{96P_{n+3}} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+5)!}{4!(n+1)!} - \frac{143(n+5)!}{96(n+3)!} < 0 \Leftrightarrow 4(n+2)(n+3) - 143 < 0$$

$\Leftrightarrow 4n^2 + 20n - 119 < 0 \Leftrightarrow -\frac{17}{2} < n < \frac{7}{2}$. Vì $n \in N; 1 \leq n \leq 3$.

Vậy các số hạng cần tìm là x_1; x_2 và x_3.

Bài 4: *Giải các hệ phương trình sau:*

a) $\begin{cases} 2A_x^y + 5C_x^y = 90 \\ 5A_x^y - 2C_x^y = 80 \end{cases}$ b) $\begin{cases} A_{5x}^{y-3} : A_{5x}^{y-2} = 1:7 \\ C_{5x}^{y-3} : C_{5x}^{y-2} = 4:7 \end{cases}$

Giải:

a) Điều kiện: $x, y \in N; 0 \le y \le x$

Đặt $\begin{cases} A_x^y = X \\ C_x^y = Y \end{cases}$ Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 2X + 5Y = 90 \\ 5X - 2Y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 20 \\ Y = 10 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{20}{y!} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ y! = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \dfrac{x!}{(x-2)!} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x^2 - x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -4(loại) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

b) Điều kiện: $x, y \in N; 3 \le y \le 5x + 2$.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} \dfrac{(5x)!}{(5x-y+3)!} \cdot \dfrac{(5x-y+2)!}{(5x)!} = \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{(5x)!}{(y-3)!(5x-y+3)!} \cdot \dfrac{(y-2)!(5x-y+2)!}{(5x)!} = \dfrac{4}{7} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(5x-y+3)} = \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{y-2}{5x-y+3} = \dfrac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 4 \\ \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$

Bài5: Tìm số nguyên dương m, n sao cho:

a) $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3$

b) $A_n^{m-1} : A_{n-1}^{m} : \left(C_{n-2}^{m} + C_{n-2}^{m-1}\right) = 21 : 60 : 10.$

Giải:

a) Điều kiện $m, n \in Z^+$ và $m \le n$.

Khi đó, ta có: $C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^{m} : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{C_{n+1}^{m+1}}{C_{n+1}^{m}} = 1 \\ \dfrac{C_{n+1}^{m}}{C_{n+1}^{m-1}} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{n-m+1}{m+1} = 1 \\ \dfrac{n-m+2}{m} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n = 0 \\ 8m - 3n = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 6 \end{cases}$$

b) Điều kiện $m, n \in Z$ và $1 \le m \le n - 2$.

Khi đó $A_n^{m-1} : A_{n-1}^m : (C_{n-2}^m + C_{n-2}^{m-1}) = 21:60:10$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A_n^{m-1}}{A_{n-1}^m} = \dfrac{21}{60} \\ \dfrac{A_{n-1}^m}{C_{n-2}^m + C_{n-2}^{m-1}} = \dfrac{60}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{A_n^{m-1}}{A_{n-1}^m} = \dfrac{7}{20} \quad (1) \\ \dfrac{A_{n-1}^m}{C_{n-1}^m} = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow \dfrac{(n-1)!}{(n-m-1)!} \cdot \dfrac{m!(n-m-1)!}{(n-1)!} = 6 \Leftrightarrow m! = 6 \Leftrightarrow m = 3.$

Thay vào (1) ta được

$$\frac{A_n^2}{A_{n-1}^3} = \frac{7}{20} \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} \cdot \frac{(n-4)!}{(n-1)!} = \frac{7}{20} \Leftrightarrow 20n = 7(n-3)(n-2).$$

$$\Leftrightarrow 7n^2 - 55n + 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 7 \\ n = \dfrac{6}{7}\ (loại) \end{array} \right.$$

Vậy giá trị cần tìm $\begin{cases} m = 3 \\ n = 7 \end{cases}$

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Có 7 bạn học sinh trong đó có 4 bạn nam và 3 bạn nữ. Sắp xếp 7 bạn đó thành một hàng ngang.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp như vậy ?

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp để các bạn nam và nữ đứng xen kẽ nhau ?

c) Có bao nhiêu cách sắp xếp nam đứng liền nhau ?

Bài 2: Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn học sinh trong đó có bạn Ngọc và Lan vào một ghế có 5 chỗ ngồi sao cho:

a) Ngọc và Lan luôn ngồi ở cạnh nhau.

b) Ngọc và Lan không ngồi ở cạnh nhau.

c) Ngọc và Lan luôn ngồi ở hai đầu ghế.

Bài 3: Có bao nhiêu cách phân phối 15 phần thưởng cho 3 học sinh giỏi sao cho học sinh thứ 1 có 2 phần thưởng, học sinh thứ 2 có 3 phần thưởng và học sinh thứ 3 có 10 phần thưởng.

Bài 4: Cho các số 1; 2; 3; 4; 5. Hỏi có thể viết được bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 5 chữ số ?

b) Có 5 chữ số khác nhau và bắt đầu bởi số 12 ?

c) Có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 2 và bắt đầu bởi chữ số 1 ?

d) Có 5 chữ số khác nhau và không bắt đầu bởi số 1, 2, 3 ?

e) Có 5 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5 ?

f) Có 8 chữ số trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, chữ số 2 có mặt 2 lần và mỗi chữ số còn lại có mặt đúng 1 lần ?

g) Có 3 chữ số khác nhau không lớn hơn 3, 4, 5 ?

Bài 5: Cho các số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Có thể viết được bao nhiêu số tự nhiên từ các số đó:

a) Có 5 chữ số.

b) Có 5 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số chẵn.

c) Có 4 chữ số khác nhau và nhỏ hơn 4000.

d) Có 4 chữ số khác nhau lớn hơn 5000 và là số chẵn.

e) Có 4 chữ số khác nhau và chữ số hàng chục là 2.

f) Có 4 chữ số khác nhau, trong đó luôn có mặt chữ số 4 và chữ số hàng đơn vị là 2.

g) Có 9 chữ số, trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng 1 lần.

Bài 6: Cho các số 0; 1; 3; 6; 9. Có thể viết được từ các số đó bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 4 chữ số khác nhau, trong đó có bao nhiêu số lẻ.

b) Có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5.

c) Có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 3.

d) Có 4 chữ số khác nhau, trong đó không có mặt chữ số 9.

e) Có 5 chữ số khác nhau trong đó chữ số 1 và 3 không được đứng cạnh nhau.

Bài 7: Từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Ta có thể viết được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau. Tìm tổng của tất cả các số đó.

Bài 8: Viết những số tự nhiên gồm 9 chữ số, trong đó có 5 chữ số 1 và bốn chữ số còn lại là 2; 3; 4; 5. Hỏi có bao nhiêu số như thế.

a) Nếu 5 chữ số 1 được xếp kề nhau ?

b) Các chữ số được xếp tuỳ ý ?

Bài 9: Cho các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5. Có thể viết được từ các số đó bao nhiêu số tự nhiên.

a) Có 3 chữ số, trong đó nhất thiết có mặt chữ số 1.

b) Có 3 chữ số khác nhau, trong đó không có mặt chữ số 1.

c) Có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 5.

d) Có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 9.

e) Có 8 chữ số trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, còn mỗi số còn lại có mặt đúng 1 lần.

Bài 10: Một tổ học sinh gồm có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau ?

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau ?

Bài 11: Có 8 bi xanh, 5 bi đỏ và 3 bi vàng. Có bao nhiêu cách chọn từ đó ra 4 viên bi.

a) Có đúng 2 viên bi xanh.
b) Số bi xanh bằng số bi đỏ.
c) Mỗi loại bi có ít nhất một viên. (Có đủ cả 3 màu).
d) Có đúng 2 màu.

Bài 12: Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 học sinh khá, và 8 học sinh trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ 8 người sao cho mỗi tổ đều có học sinh giỏi và có ít nhất hai học sinh khá ?

Bài 13: Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

Bài 14: Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ ?

Bài 15: Một đoàn tàu có 3 toa chở khách, toa I, II, III. Trên sân có 4 khách chuẩn bị đi tàu. Biết mỗi toa có ít nhất 4 chỗ trống. Hỏi:

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu ?
b) Có bao nhiêu cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu để có một toa có 3 trong 4 vị khách nói trên ?

Bài 16: Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư cũng khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó 3 tem thư và 3 bì thư rồi dán 3 tem thư đó lên 3 bì thư đã chọn, mỗi bì thư chỉ dán một tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy ?

Bài 17: Giải các phương trình sau:

1) $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$.
2) $P_{x+3} = 720.A_x^5.P_{x-5}$.
3) $A_x^3 + 3A_x^2 = \frac{1}{2}P_{x+1}$.
4) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$.
5) $P_xA_x^2 + 72 = 6\left(A_x^2 + 2P_x\right)$.
6) $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$.
7) $35C_{2x}^{x-1} = 132C_{2(x-1)}^{x}$

8) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

9) $\dfrac{1}{C_4^x} - \dfrac{1}{C_5^x} = \dfrac{1}{C_6^x}$

10) $24\left(A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}\right) = 23A_x^4$.

11) $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$.

12) $x^2.C_{x-1}^{x-4} = A_4^2.C_{x+1}^3 - xC_{x-1}^{x-4}$.

Bài 18: Giải các bất phương trình sau:

1) $\dfrac{A_{x+4}^4}{(x+2)!} < \dfrac{143}{4P_x}$.

2) $\dfrac{C_{x-1}^{x-3}}{A_{x+1}^4} < \dfrac{1}{14P_3}$.

3) $2C_{x+1}^2 + 3A_x^2 < 30$.

4) $C_{x+2}^{x-1} - C_{x+2}^x \le 2A_{x+1}^2$.

Bài 19: Có bao nhiêu số hạng dương của dãy (x_n) cho bởi:

$$x_n = \frac{195}{4P_n} - \frac{A_{n+3}^3}{P_{n+1}} \qquad \text{với } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 20: Tìm các số hạng âm của dãy (x_n) cho bởi:

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} \qquad \text{với } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 21: Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$.($n \ge 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n.

Bài 22: Tìm giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!} \quad \text{biết rằng } C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149.$$

Bài 23: Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 50. \\ A_x^y + 2C_x^y = 40. \end{cases}$

2) $\begin{cases} A_y^x.P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126. \\ P_{x+1} = 720. \end{cases}$

Bài 24: Tìm x, y sao cho:

1) $C_{x+1}^{y} : C_{x}^{y+1} : C_{x}^{y-1} = 6 : 5 : 2$.

2) $(A_{x-1}^{y} + yA_{x-1}^{y-1}) : A_{x}^{y-1} : C_{x}^{y-1} = 10 : 2 : 1$.

Bài 25: Chứng minh rằng với $4 \le k \le n$ ta có:

a) $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} = C_{n+4}^k$.

b) $2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$.

§ 3: NHỊ THỨC NIUTƠN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Công thức nhị thức Niutơn:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} . b^k .$$

2. Các tính chất của công thức Niutơn:

* Số các số hạng của công thức bằng n + 1.

* Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng số mũ của nhị thức $(n-k)+k=n$

* Số hạng tổng quát thứ $(k+1)$ của khai triển $(a+b)^n$ có dạng:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} . b^k$$

* Các hệ số nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau vì:

$$C_n^k = C_n^{n-k} .$$

B. CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: **Xác định các số hạng của khai triển nhị thức Niutơn.**

* **Phương pháp:**

Áp dụng kết quả số hạng tổng quát thứ k + 1 của khai triển $(a+b)^n$

$$T_{k+1} = C_n^k . a^{n-k} . b^k .$$

Bài 1: *Cho khai triển* $(1-2x)^{12}$.

1) Tìm tổng 3 số hạng đầu tiên theo luỹ thừa tăng dần của x trong khai triển.

2) Tìm số hạng thứ 8 trong khai triển trên.

(Thứ tự các số hạng tính từ trái sang phải).

Giải:

1) Số hạng đầu tiên $T_1 = C_{12}^0 . 1^{12} . (-2x)^0 = 1$.

Số hạng đầu hai: $T_2 = C_{12}^1.1^{11}(-2x)^1 = -24x$.

Số hạng đầu ba: $T_3 = C_{12}^2.1^{10}(-2x)^2 = 264x^2$.

Vậy tổng của 3 số hạng đầu tiên là: $T = 1 - 24x + 264x^2$.

2) Số hạng thứ 8 trong khai triển là:

$T_8 = C_{12}^7.1^5.(-2x)^7 = -C_{12}^7.2^7.x^7$.

Bài 2: *Cho khai triển* $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{12}$

1) Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển.

2) Tìm số hạng trong khai triển không chứa x (độc lập với x).

Giải:

Số hạng tổng quát thứ $k+1$ trong khai triển đó là:

$$T_{k+1} = C_{12}^k.\left(\frac{x}{3}\right)^{12-k}.\left(\frac{3}{x}\right)^k = C_{12}^k.\frac{x^{12-k}}{x^k}.\frac{3^k}{3^{12-k}} = C_{12}^k.3^{2k-12}.x^{12-2k}$$

1) Để T_{k+1} là số hạng của x^4 thì: $12 - 2k = 4 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy số hạng đó là $T_5 = C_{12}^4.3^{-4}.x^4 = \frac{55}{9}x^4$

Do đó hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển là $\frac{55}{9}$.

2) Để T_{k+1} không chứa x thì: $12 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng không chứa x của khai triển là $T_7 = C_{12}^6 = 924$.

Bài 3: *Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển* $\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$ *bằng 5.*

Tìm số hạng ở giữa của khai triển

Giải:

Hạng tử thứ 3 của khai triển là:

$$T_3 = C_n^2.x^{n-2}.\left(\frac{1}{3}\right)^2 \qquad \forall n \in \mathrm{N}.$$

$$= \frac{C_n^2}{9}.x^{n-2}.$$

Theo bài ra ta có: $\frac{C_n^2}{9} = 5 \Leftrightarrow C_n^2 = 45 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 45$.

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -9 \ (loại) \end{array}\right.$$

Vậy $n = 10$, khai triển trở thành $\left(x - \frac{1}{3}\right)^{10}$

Suy ra số hạng đứng ở giữa là: $T_6 = C_{10}^5.x^5.\left(-\frac{1}{3}\right)^5 = -\frac{28}{27}.x^5$.

Bài 4: *Cho khai triển* $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$

1) Xác định các số hạng thứ 1; 2; 3 trong khai triển.

2) Biết tổng của 3 hệ số của 3 số hạng nói trên là 11. Tìm hệ số của số hạng chứa x^2.

Giải:

1) Ta có: $T_1 = C_n^0\left(x^3\right)^n\left(\frac{1}{x^2}\right)^0 = C_n^0.x^{3n}$.

$$T_2 = C_n^1\left(x^3\right)^{n-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)^1 = C_n^1.x^{3n-5}$$

$$T_3 = C_n^2\left(x^3\right)^{n-2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = C_n^2.x^{3n-10}$$

2) Hệ số của 3 số hạng trên là: C_n^0, C_n^1, C_n^2

Theo bài ra ta có: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 11$

$$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 11 \Leftrightarrow n^2 + n - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 4 \\ n = -5 \end{array}\right.$$

Khi đó $n = 4$, nên khai triển $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^4$ có số hạng thứ $k+1$ là:

$$T_{k+1} = C_4^k.\left(x^3\right)^{4-k}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^k = C_4^k.x^{12-5k}$$

Để T_{k+1} chứa x^2 thì $12-5k = 2 \Leftrightarrow k - 2$.

Vậy hệ số của số hạng có x^2 là $C_4^2 = 6$.

Bài 5: *Tìm số hạng của khai triển* $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ *là một số nguyên.*

Giải:

Số hạng thứ $k+1$ của khai triển:

$$T_{k+1} = C_9^k(\sqrt{3})^{9-k}.(\sqrt[3]{2})^k = C_9^k 3^{\frac{9-k}{2}}.2^{\frac{k}{3}}. \qquad k \in Z\ ;\ 0 \le k \le 9.$$

Để T_{k+1} là số nguyên thì $\frac{9-k}{2} \in Z$ *và* $\frac{k}{3} \in Z$

Suy ra $\begin{cases} k = 1;3;5;7;9 \\ k = 0;3;6;9 \end{cases}$ Vậy $\left[\begin{array}{l} k = 3 \\ k = 9 \end{array}\right.$

+ Nếu $k = 3$, số hạng cần tìm là $T_4 = C_9^3.3^3.2 = 4536$..

+ Nếu $k = 9$, số hạng cần tìm là $T_4 = C_9^3.3^0.2^3 = 8$..

Bài 6: *Cho khai triển* $\left(a - \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$.

1) Tìm số hạng thứ 4, thứ 5 của khai triển.

2) Tìm số hạng của khai triển chứa a với số mũ tự nhiên.

Giải:

Số hạng tổng quát thứ $k + 1$ của khai triển

$$T_{k+1} = C_{13}^k.(a)^{13-k}.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^k$$

$k \in \mathbb{N}; 0 \le k \le 13$

$$= C_{13}^k.a^{13-k}.a^{-\frac{k}{3}} = C_{13}^k.a^{\frac{39-4k}{3}}$$

1) Số hạng thứ 4 của khai triển là: $T_4 = C_{13}^3.a^9$.

Số hạng thứ 5 của khai triển là: $T_5 = C_{13}^4.a^{\frac{23}{3}} = C_{13}^4.a^7.\sqrt[3]{a^2}$.

2) Để T_{k+1} chứa a với số mũ tự nhiên thì:

$$\frac{39-4k}{3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 39 - 4k \,\vdots\, 3 \qquad 0 \le k \le \frac{39}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4k \,\vdots\, 3 \text{ và } 0 \le k \le \frac{39}{4}$$

$$\Leftrightarrow k \,\vdots\, 3 \text{ và } 0 \le k \le 9$$

Vậy $k = 0, 3, 6, 9$..

Do đó các số hạng cần tìm

$$T_1 = C_{13}^0.a^{13} \qquad T_4 = C_{13}^3.a^9$$

$$T_7 = C_{13}^6.a^5 \qquad T_{10} = C_{13}^9.a.$$

Bài 7: *Tìm số hạng chứa* x^8 *trong khai triển nhị thức Niutơn* $\left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)$

biết rằng $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$.

Giải:

Ta có $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3);\ n \in \mathbf{N}$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{(n+1)!3!} - \frac{(n+3)!}{n!3!} = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(n+3)(n+4) - (n+1)(n+2)(n+3) - 42(n+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3n - 36 = 0 \Leftrightarrow n = 12$$

Vậy khai triển đã cho trở thành $\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x^5}\right)^{12}$, có số hạng tổng quát thì $k+1$ là:

$$T_{k+1} = C_{12}^{k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{12-k} . \left(\sqrt{x^5}\right)^{k} = C_{12}^{k} x^{3k-36} x^{\frac{5k}{2}} = C_{12}^{k} x^{\frac{11k-72}{2}}$$

Để T_{k+1} chứa x^8 thì $\frac{11k-72}{2} = 8 \Leftrightarrow k = 8$

Vậy số hạng cần tìm là: $C_{12}^{8}.x^{8}$.

Bài 8: *Tính A_n^2 nếu biết số hạng thứ 6 của khai triển $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ không phụ thuộc vào x.*

Giải:

Số hạng thứ 6 của khai triển là

$$T_6 = C_n^5.\left(\sqrt[3]{x}\right)^{n-5}.\left(\frac{1}{x}\right)^5 = C_n^5.x^{\frac{n-5}{3}}.x^{-5} = C_n^5.x^{\frac{n-20}{3}}$$

Vì T_6 không phụ thuộc vào x nên $\frac{n-20}{3} = 0 \Leftrightarrow n = 20$

Vậy $A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 380.$

Bài 9: *Xác định số n sao cho trong khai triển $(x+2)^n$ số hạng thứ 11 là số hạng có hệ số lớn nhất.*

Giải:

Ta có số hạng thứ 11 $T_{11} = C_n^{10}.x^{n-10}.2^{10}$.

Ta có số hạng thứ 10 $T_{10} = C_n^{9}.x^{n-9}.2^{9}$.

Ta có số hạng thứ 12 $T_{12} = C_n^{11}.x^{n-11}.2^{11}$.

Vì số hạng thứ 11 có hệ số lớn nhất nên:

$$\begin{cases} C_n^9.2^9 < C_n^{10}.2^{10} \\ C_n^{11}.2^{11} < C_n^{10}.2^{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{C_{10}^{9}}{C_n^{10}} < 2 \\ \dfrac{C_n^{10}}{C_n^{11}} > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{n-9} < 2 \\ \dfrac{11}{n-10} > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n > 14 \\ n < \dfrac{31}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 14 < n < \frac{31}{2} \quad \forall n \in \mathrm{N}$$

Vậy $n = 15$.

Bài 10: *Tìm số nguyên dương x nếu biết trong khai triển* $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$ ***tỉ số*** *của số hạng thứ 7 kể từ số hạng đầu và số hạng thứ 7* ***kể từ số hạng cuối*** *là* $\frac{1}{6}$.

Giải:

Ta có số hạng thứ 7 kể từ số hạng đầu là: $C_x^6\left(\sqrt[3]{2}\right)^{x-6}.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^6$

Ta có số hạng thứ 7 kể từ số hạng cuối là : $C_x^{x-6}\left(\sqrt[3]{2}\right)^6.\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{x-6}$

Theo giả thuyết ta có:

$$\frac{C_x^6.2^{\frac{x-6}{3}}.3^{-2}}{C_x^{x-6}.2^2.3^{\frac{6-x}{3}}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6^{\frac{x-6}{3}} = 6 \Leftrightarrow \frac{x-6}{3} = 1 \Leftrightarrow x = 9$$

Vậy $x = 9$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2: Tính giá trị biểu thức - Chứng minh đẳng thức.

Phương pháp: *Để tính giá trị của một biểu thức hay chứng minh một đẳng thức bằng cách áp dụng khai triển nhị thức Niutơn ta thực hiện.*

- *Khai triển một nhị thức Niutơn.*
- *Chọn giá trị thích hợp của biến.*
- *Suy ra giá trị của biểu thức hay đẳng thức được chứng minh.*

Bài 1: *Tính giá trị biểu thức*

a) $A = C_{2007}^0 + C_{2007}^1 + C_{2001}^2 + \ldots + C_{2007}^{2007}$

b) $B = C_{2007}^0 - C_{2007}^1 + C_{2007}^2 - \ldots - C_{2007}^{2007}$

c) $C = C_{2007}^0 + 2C_{2007}^1 + 2^2 C_{2007}^2 + ... + 2^{2007} C_{2007}^{2007}$

d) $D = 3C_{2007}^0 + 3^2 C_{2007}^1 + 3^3 C_{2007}^2 + ... + 3^{2008} C_{2007}^{2007}$

Giải:

Ta có:

$$(1+x)^{2007} = C_{2007}^0 + C_{2007}^1.x + C_{2007}^2.x^2 + ... + C_{2007}^{2007}.x^{2007} \quad (1)$$

a) Chọn $x = 1$, thay vào (1) ta được

$$A = C_{2007}^0 + C_{2007}^1 + C_{2007}^2 + ... + C_{2007}^{2007} = (1+1)^{2007} = 2^{2007}$$

b) Chọn $x = -1$, thay vào 1 ta được

$$B = C_{2007}^0 - C_{2007}^1 + C_{2007}^2 - ... - C_{2007}^{2007} = (1-1)^{2007} = 0$$

c) Chọn $x = 2$, thay vào (1) ta được

$$C = C_{2007}^0 + 2C_{2007}^1 + 2^2 C_{2007}^2 + ... + 2^{2007} C_{2007}^{2007} = (1+2)^{2007} = 3^{2007}$$

d) Từ (1) suy ra

$$x(1+x)^{2007} = C_{2007}^0.x + C_{2007}^1.x^1 + C_{2007}^2.x^2 + ... + C_{2007}^{2007}.x^{2007} \quad (2)$$

Chọn $x = 3$, thay vào (2) ta được

$$D = 3C_{2007}^0 + 3^2 C_{2007}^1 + 3^3 C_{2007}^2 + ... + 3^{2008} C_{2007}^{2007} = 3(1+3)^{2007} = 3.4^{200}$$

Bài 2: ***Tính giá trị của biểu thức:***

$$S = C_{11}^6 + C_{11}^7 + C_{11}^8 + C_{11}^9 \div C_{11}^{10} + C_{11}^{11}$$

Giải:

Áp dụng kết quả $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta suy ra

$$S = C_{11}^5 + C_{11}^4 + C_{11}^3 + C_{11}^2 + C_{11}^1 + C_{11}^0$$

Do đó : $2S = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{11}$

Hơn nữa ta có: $(1+x)^{11} = C_{11}^0 + C_{11}^1.x + C_{11}^2.x^2 + ... + C_{11}^{11}.x^{11} \quad (1)$

Chọn $x = 1$, thay vào (1), ta được:

$$2S = C_{11}^0 + C_{11}^1 + C_{11}^2 + ... + C_{11}^{11} = (1+1)^{11} = 1024$$

Suy ra $S = 512$.

Bài 3: ***Với n là số nguyên dương chứng minh các hệ thức sau:***

1) $2^n = C_n^n + C_n^{n-1} + ... + C_n^1 + C_n^0$.

2) $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ...C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + ... + C_{2n}^{2n}$.

Giải:

1) Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^{n-1}.x^{n-1} + C_n^n x^n \quad (1)$

Chọn $x = 1$, thay vào (1) ta được

$$2^n = C_n^n + C_n^{n-1} + \ldots + C_n^1 + C_n^0$$

2) Ta có $\left(1+x\right)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1.x + \ldots + C_{2n}^{2n-1}.x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n}$ **(2)**

Chọn $x = -1$ thay vào (2) ta được

$$0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + \ldots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$$

Suy ra $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \ldots + C_{2n}^{2n}$.

Bài 4: *Chứng minh rằng*

$$4^n C_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - \ldots + \left(-1\right)C_n^n = C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + 2^n C_n^n.$$

Giải:

Ta có

$$(2x-1)^n = C_n^0(2x)^n - C_n^1(2x)^{n-1} + C_n^2(2x)^{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n \quad \textbf{(1)}$$

Chọn $x = 2$, thay vào (1) ta được

$$3^n = 4^n C_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n \quad \textbf{(2)}$$

Mặt khác, ta có

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1.x + C_n^2.x^2 + \ldots + C_n^n x^n \quad \textbf{(3)}$$

Chọn $x = 2$, thay vào (3) ta được

$$3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 - \ldots + 2^n C_n^n \quad \textbf{(4)}$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$4^n C_n^0 - 4^{n-1}C_n^1 + 4^{n-2}C_n^2 - \ldots + (-1)C_n^n = C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + 2^n C_n^n$$

Bài 5: *Chứng minh rằng*

$$C_{2007}^0 + 3^2 C_{2007}^2 + 3^4 C_{2007}^4 + \ldots + 3^{2006} C_{2007}^{2006} = 2^{2006}(2^{2007} - 1)$$

Giải:

Ta có $(1+x)^{2007} = C_{2007}^0 + C_{2007}^1.x + C_{2007}^2.x^2 + \ldots + C_{2007}^{2007}.x^{2007}$

Chọn $x = 3$, ta được

$$4^{2007} = C_{2007}^0 + 3C_{2007}^1 + 3^2 C_{2007}^2 + 3^3 C_{2007}^3 + \ldots + 3^{2007} C_{2007}^{2007} \quad \textbf{(1)}$$

Mặt khác

$(1-x)^{2007} = C_{2007}^0 - C_{2007}^1.x + C_{2007}^2.x^2 - C_{2007}^3.x^3 + \ldots + C_{2007}^{2007}.x^{2007}$

Chọn $x = 3$, ta được

$$-2^{2007} = C_{2007}^0 - 3C_{2007}^1 + 3^2 C_{2007}^2 + \ldots - 3^{2007} C_{2007}^{2007} \quad \textbf{(2)}$$

Lấy (1) cộng (2) ta được

$4^{2007} - 2^{2007} = 2C_{2007}^0 + 2.3^2 C_{2007}^2 + \ldots + 2.3^{2006} C_{2007}^{2006}$

Suy ra: $\quad C_{2007}^0 + 3^2 C_{2007}^2 + ..3^{2006} C_{2007}^{2006} = \dfrac{4^{2007} - 2^{2007}}{2}$

$$= \frac{2^{4014} - 2^{2007}}{2} = 2^{4013} - 2^{2006} = 2^{2006}(2^{2007} - 1)$$

Bài 6: *Chứng minh rằng, với mọi số nguyên dương n chẵn ta luôn có*

$$\frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!1!} = \frac{2^{n-1}}{n!}$$

Giải:

Đặt $S = \frac{1}{1!(n-1)!} + \frac{1}{3!(n-3)!} + \frac{1}{5!(n-5)!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!1!}$

Khi đó

$$n!S = \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{5!(n-5)!} + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!1!}$$

$$n!S = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{n-1}$$

Mặt khác, theo bài 3 ta có $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

$C_n^0 - C_n^1 + \ldots - C_n^{n-1} + C_n^n = 0$ (n chẵn)

Trừ vế theo vế ta được:

$$2(C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1}) = 2^n$$

$$\Rightarrow C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} = 2^{n-1}$$

Vậy $S = \frac{2^{n-1}}{n!}$ hay ta có điều phải chứng minh.

Bài 7: ***Cho** A là một tập hợp có 20 phần tử.*

***a)** Có bao nhiêu tập hợp con của A*

***b)** Có bao nhiêu tập con khác rỗng của A mà số phần tử của nó là chẵn.*

Giải:

a) **Số tập con của** *A* không có phần tử nào (0) là $1 = C_{20}^0$

Số tập con của *A* có 1 phần tử là: C_{20}^1

Số tập con của *A* có 2 phần tử là: C_{20}^2

⋮

Số tập con của *A* có 20 phần tử là: C_{20}^{20}

Suy ra, tổng số các tập hợp con của *A* là:

$C_{20}^0 + C_{20}^1 + \ldots + C_{20}^{20} = (1+1)^{20} = 2^{20}$ (áp dụng bài 3)

b) **Số tập con khác** rỗng của *A* có số phần tử chẵn là: $C_{20}^2 + C_{20}^4 + \ldots + C_{20}^{20}$.

Từ kết quả tương tự bài 6 ta có: $S = C_{20}^0 + C_{20}^2 + ... + C_{20}^{20} = \dfrac{2^{20}}{2} = 2^{19}$

Suy ra $C_{20}^2 + C_{20}^4 + ... + C_{20}^{20} = 2^{19} - C_{20}^0 = 2^{19} - 1$.

Bài 8: *Cho k, n là các số tự nhiên và* $5 \le k \le n$

Chứng minh rằng

$$C_5^0.C_n^k + C_5^1.C_n^{k-1} + ... + C_5^5.C_n^{k-5} = C_{n+5}^k.$$

Giải:

Xét tích $(1+x)^5(1+x)^n$ bằng 2 cách.

Ta có khai triển $(1+x)^{n+5}$ là hệ số của x^k là C_{n+5}^k với $5 \le k \le n$.

Mặt khác, hệ số của x^k trong đa thức tích:

$(C_5^0 + C_5^1x + ... + C_5^5x^5)(C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + ... + C_n^nx^n)$ là

$C_5^0.C_n^k + C_5^1.C_n^{k-1} + ... + C_5^5.C_n^{k-5}$

Từ đó, đồng nhất các hệ số của x^k ta được

$$C_5^0.C_n^k + C_5^1.C_n^{k-1} + ... + C_5^5.C_n^{k-5} = C_{n+5}^k.$$

Bài 9: *Chứng minh rằng*

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Giải:

Xét tích $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$

Ta có, hệ số của số hạng chứa x^n trong khai triển $(1+x)^{2n}$ là C_{2n}^n

Hơn nữa, hệ số của số hạng chứa x^n trong khai triển $(1+x)^n(1+x)^n$

$= (C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^nx^n)(C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + ... + C_n^n)$ là

$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$

Từ đó, đồng nhất các hệ số của x^n ta được:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Cho khai triển:

$$(1-3x)^{12};\ \left(2 - \frac{x}{2}\right)^{20};\ \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12};\ \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{15}$$

a) Tìm số hạng thứ 6, 7 của các khai triển trên.

b) Tìm hệ số của số hạng thứ 8 của khai triển trên.

c) Tìm số hạng của khai triển chứa x^{12}.

Bài 2: Cho biểu thức $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{16}$.

a) Tìm số hạng thứ 9 của khai triển.
b) Tìm số hạng của khai triển không chứa x.
c) Tìm số hạng của khai triển chứa x với số mũ tự nhiên.
d) Tìm số hạng của khai triển chứa x với số mũ nguyên.

Bài 3: Cho biết hệ số của số hạng thứ 3 trong khai triển nhị thức

$\left(x^2\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^n$ bằng 36. Tìm số hạng thứ 7.

Bài 4: Biết tổng các hệ số của khai triển nhị thức $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$ là 64. Tìm s

hạng của khai triển không chứa x.

Bài 5: Biết số hạng thứ 9 của khai triển $\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{5}\right)^n$ có hệ số lớn nhất. Tìm n

Bài 6: Cho khai triển $\left(a^2-\dfrac{2}{a}\right)^n$. Biết rằng tổng của 3 hệ số của 3 số hạng

đầu tiên trong khai triển là 97.

a) Số hạng thứ mấy của khai triển chứa a^7.
b) Tìm số hạng của khai triển không chứa a.

Bài 7: Tìm số hạng hữu tỉ của khai triển sau:

a) $(\sqrt{3}-\sqrt{15})^6$
b) $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7})^{36}$

Bài 8: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của nhị thức $(1+x)^n$ biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển trên bằng 1024.

Bài 9: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức:

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 \text{ với } x>0.$$

Bài 10: Tính

a) $A=C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5$
b) $B=C_6^0+3C_6^1+3^2C_6^2+\ldots+3^6C_6^6$
c) $C=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n$

Bài 11: Chứng minh rằng

$$1-10C_{2n}^{1}+10^{2}C_{2n}^{2}-10^{3}C_{2n}^{3}+...-10^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}+10^{2n}=81^{n}.$$

Bài 12: Tính

$$P=3^{17}C_{17}^{0}-4^{1}.3^{16}C_{17}^{1}+4^{2}.3^{15}C_{17}^{2}-4^{3}.3^{14}C_{17}^{3}+...-4^{17}C_{17}^{17}.$$

Bài 13: Chứng minh rằng

$$(C_{2n}^{0})^{2}-(C_{2n}^{1})^{2}+(C_{2n}^{2})^{2}-...+(C_{2n}^{2n})^{2}=(-1)^{n}C_{2n}^{n}.$$

Bài 14: Tính

$$S=C_{n}^{0}+2C_{n}^{1}+3C_{n}^{2}+...+(n+1)C_{n}^{n}.$$

Bài 15:

1) Tính $S=C_{10}^{0}+C_{10}^{1}+...+C_{10}^{10}$.

2) Giải phương trình $C_{x}^{x-1}+C_{x}^{x-2}+...+C_{x}^{x-9}+C_{x}^{x-10}=1023$.

Bài 16: Cho một tập hợp gồm 10 phần tử khác nhau. Xét các tập con khác rỗng chứa các số chẵn các phần tử rút ra từ tập hợp trên. Hãy tính có bao nhiêu tập hợp con như vậy?

Bài 17: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức $\left(\frac{1}{x^{4}}+x^{7}\right)^{n}$ biết rằng $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{2}+...+C_{2n+1}^{n}=2^{20}-1$.

Bài 18: Biết rằng tổng:

$$S=\frac{1}{1!\,2007!}+\frac{1}{3!\,2005!}+\frac{1}{5!\,2003!}+...+\frac{1}{2007!\,1!}$$

Có thể viết dưới dạng $\frac{2^{a}}{b!}$ với a, b là số nguyên dương. Hãy tìm cặp số (a,b).

Bài 19: Tìm số nguyên dương bé nhất n trong khai triển $(1+x)^{n}$ có hai hệ số liên tiếp có tỉ số là $\frac{7}{15}$.

§ 4. BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Phép thử, biến cố:

- **Phép thử ngẫu nhiên** là việc thực hiện một nhóm các điều kiện xác định (có th **được lặp lại nhiều** lần) và kết quả của nó ta không có thể đoán định trước được.

- **Không gian mẫu** là tập hợp tất cả các kết quả có thể (loại trừ nhau) của **một phép thử** hay còn gọi là không gian các biến cố sơ cấp kí hiệu Ω.

- **Mỗi tập con** A của Ω được gọi là biến cố. Mỗi phần tử của Ω gọi là **một biến cố** sơ cấp.

- **Phân loại:**

  + **Biến cố** ngẫu nhiên là biến cố có thể xảy ra hoặc có thể không xảy ra **khi thực hiện** phép thử.

  + **Biến cố** chắc chắn là biến cố nhất định xảy ra khi thực hiện phép **thử, kí hiệu** là Ω.

  + **Biến cố** không thể là biến cố không xảy ra khi thực hiện phép thử kí **hiệu là** ϕ.

- **Các phép toán:**

  + **Biến cố tổng** $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A hoặc B xảy ra.

  + **Biến cố tích** $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B cùng xảy ra.

  + **Biến cố hiệu** $A \setminus B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra và B không xảy ra.

Chú ý:

$\Omega \setminus A = \overline{A}$: được gọi là biến cố đối của A.

$\overline{A}$ xảy ra khi A không xảy ra.

Nếu $A \cap B = \phi$ thì A và B được gọi là xung khắc.

2. Xác suất:

- **Định nghĩa:** Nếu A là biến cố liên quan đến phép thử.

Xác suất biến cố A ký hiệu $P(A) = \dfrac{m}{n}$

Trong đó n là số các khả năng có thể (số phần tử của Ω)

m **là số các khả năng** thuận lợi cho A (Tức là những khả năng nếu nó **xảy ra thì** A **xảy ra).**

- **Tính chất:**

  + $0 \le P(A) \le 1 \quad \forall A$.

  Trong đó $P(\phi) = 0$; $P(\Omega) = 1$.

  + **Nếu** A, B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Tổng quát, nếu $A_1, A_2 \ldots A_n$ là các biến cố xung khắc từng đôi một thì:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

  + $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: Tìm không gian mẫu của một phép thử.

Phương pháp:

Tìm tất cả các khả năng có thể khi thực hiện một phép thử (các khả năng này loại trừ nhau, tức là nếu khả năng này xảy ra thì khả năng kia không thể xảy ra khi thực hiện phép thử).

Bài 1: *Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất. Mô tả không gian mẫu của phép thử đó.*

Giải:

Khi thực hiện phép thử gieo một con xúc xắc, có các trường hợp sau có thể xảy ra:

A_1: Xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm 1.
A_2: Xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm 2.
⋮
A_6: Xúc xắc xuất hiện mặt có số chấm 6.

Ta có $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots A_6\}$.

Bài 2: *Tung hai con xúc xắc cân đối và đồng nhất như nhau. Tìm không gian mẫu của phép thử đó.*

Giải:

Khi thực hiện phép thử tung hai con xúc xắc, không gian mẫu của chúng sẽ gồm các khả năng sau:

$\Omega = \{(1, 1); (1, 2); \ldots (1, 6); (2, 1) \ldots (2, 6); \ldots (6, 1); \ldots (6, 6)\}$.

(Có 36 khả năng có thể xảy ra).

Bài 3: *Trong một hộp có chứa 3 viên bi đỏ, 2 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra hai bi. Mô tả không gian mẫu của phép thử đó. Không gian đó có bao nhiêu phần tử.*

Giải:

Nếu các bi đỏ ta đánh dấu 1; 2; 3 và các bi xanh ta đánh dấu 4, 5. Khi đó, không gian mẫu của phép thử đó là:

$\Omega = \{\{1, 2\};\{1, 3\};\{1. 4\};\{1, 5\};\{2, 3\};\{2, 4\};\{2, 5\};\{3, 4\};\{3, 5\};\{4, 5\}\}$

Có $C_5^2 = 10$ phần tử.

Bài 4: *Gieo một đồng tiền xu cân đối, đồng chất 3 lần và quan sát sự xuất hiện của mặt sấp (S) và mặt ngửa (N) của đồng xu ấy. Xây dựng không gian mẫu.*

Giải: Khi thực hiện phép thử trên, các khả năng có thể xảy ra.

- Ba lần không có mặt sấp nào xuất hiện đó là biến cố *NNN*.
- Ba lần chỉ có 1 mặt sấp xuất hiện đó là biến cố *SNN, NSN, NNS*.
- Ba lần có 2 mặt sấp xuất hiện đó là biến cố *SSN, SNS, NSS*.
- Ba lần có 3 mặt sấp xuất hiện đó là biến cố *SSS*.

Vậy không gian mẫu:

$\Omega = \{NNN, SNN, NSN, NNS, SSN, SNS, NSS, SSS\}$.

Dạng 2: Tìm xác suất của biến cố.

*** Phương pháp:**

Cách 1: Áp dụng định nghĩa.

- Tìm số các khả năng có thể của một phép thử : n (Số các phần tử của Ω).

- Tìm số các khả năng thuận lợi cho biến cố A: m.

- Khi đó, áp dụng kết quả: $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Cách 2: Áp dụng tính chất.

$P(A \cup B) = P(A) + (B)$.

Chú ý A, B là hai biến cố xung khắc (tức là hai biến cố không thể xảy ra đồng thời trong kết quả của một phép thử).

Bài 1: *Sắp xếp ngẫu nhiên 3 bạn nam - trong đó có bạn Nguyên và 2 bạn nữ - trong đó có bạn Mai ngồi vào một ghế có 5 chỗ. Tìm xác suất để:*

a) Xếp được các học sinh nam và nữ ngồi xen kẽ vào nhau.

b) Xếp được các học sinh nam ngồi một phía và học sinh nữ ngồi một phía.

c) Xếp được các học sinh sao cho Nguyên và Mai luôn được ngồi ở cạnh nhau.

Giải:

Khi sắp xếp 5 học sinh ngẫu nhiên ngồi vào một ghế có 5 chỗ ngồi, số các khả năng có thể xảy ra là: $n = P_5 = 5! = 120$.

a) Gọi A là biến cố xếp được các học sinh nam và nữ ngồi.

Ta có một số khả năng thuận lợi cho A là $m_A = 3!\,.\,2! = 12$.

(Vì số cách chọn vị trí cho 3 bạn nam vào 3 chỗ ngồi là 3!, tương ứng với mỗi cách chọn đó, số cách chọn vị trí cho 2 bạn nữ vào 2 chỗ ngồi còn lại là 2! nên $m_A = 3!.\,2!$.

Vậy $P(A) = \dfrac{m_A}{n} = \dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10}$.

b) Gọi B là biến cố xếp được các học sinh nam ngồi một phía và nữ ngồi một phía.

Ta có số khả năng thuận lợi cho B là $m_B = 3!\,.\,2!\,.\,2! = 24$.

(Vì trước hết chọn vị trí cho 3 người nam là 3! cách, sau đó chọn vị trí cho 2 người nữ là 2! cách, rồi đổi chỗ các nhóm học sinh nam - nữ cho nhau có 2! cách nên $m_B = 3!.2!.2!$).

Vậy $P(B) = \dfrac{m_B}{n} = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$.

c) Gọi C là biến cố xếp được các học sinh sao cho Nguyên và Mai luôn được ngồi ở cạnh nhau.

Ta có, số các khả năng thuận lợi cho C là $m_C = 4 \,.\, 2! \,.\, 3! = 48$.

(Vì trước hết chọn vị trí cho Nguyên và Mai ngồi được cạnh nhau là 4, sau đó Nguyên và Mai có thể đổi chỗ có 2! cách và tương ứng với mỗi cách chọn vị trí của Nguyên và Mai, số cách chọn vị trí của 3 học sinh còn lại là 3! nên $m_C = 4 \,.\, 2! \,.\, 3!$).

Vậy $P(C) = \dfrac{m_C}{n} = \dfrac{48}{120} = \dfrac{2}{5}$.

Bài 2: *Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng nhất như nhau và quan sát số chấm xuất hiện trên mặt hai con xúc xắc đó. Tìm xác suất để:*

a) Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là 8.

b) Số chấm xuất hiện trên hai mặt con xúc xắc bằng nhau.

c) Tích số chấm xuất hiện trên 2 con xúc xắc là chẵn, lẻ.

Giải: Khi gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất, số các khả năng này có thể xảy ra là: $n = 6 \,.\, 6 = 36$.

a) Gọi A là biến cố tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là 8.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho A là: $m_A = 5$.

Vì đó là các khả năng: (2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2).

Vậy: $P(A) = \dfrac{5}{36}$.

b) Gọi B là biến cố số chấm xuất hiện trên hai mặt con xúc xắc là bằng nhau.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho B là: $m_B = 6$.

Vì đó là các khả năng: (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6).

Vậy: $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

c) Gọi C là biến cố tích số mặt xuất hiện trên hai mặt con xúc xắc là chẵn.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho C là: $m_C = 27$.

Vì đó là các khả năng: (1, 2); (1, 4); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 2); (3, 4); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 2); (5, 4); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6).

Vậy: $P(C) = \dfrac{27}{36} = \dfrac{3}{4}$.

Gọi D là biến cố tổng số mặt xuất hiện trên hai mặt con xúc xắc là lẻ.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho D là: $m_D = 36 - 27 = 9$.

Vậy: $P(D) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.

Nhận xét:

Ta có biến cố C và D là hai biến cố đối lập nhau và $P(D) = 1 - P(C)$.

Như vậy, với hai biến cố A, $\overline{A}$ ($\overline{A}$ là biến cố đối lập với A) thì $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Bài 3: *Gieo 3 đồng xu cân đối và đồng chất như nhau. Tìm xác suất của các biến cố sau:*

1) Có đúng 2 mặt sấp xuất hiện.

2) Có ít nhất một mặt sấp xuất hiện.

3) Có nhiều nhất 1 mặt sấp xuất hiện.

Giải:

Ta kí hiệu S là mặt sấp xảy ra.

N là mặt ngửa xảy ra.

Khi gieo 3 đồng xu cân đối và đồng chất như nhau, số các khả năng xảy ra là: $n = 2^3 = 8$

Đó là các khả năng:

$\Omega = \{NNN; NNS; NSN; SNN; NSS; SNS; SSN; SSS\}$.

1) Gọi A là biến cố có đúng 2 mặt sấp xuất hiện.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho A là $m_A = 3$.

Đó là các khả năng NSS; SNS; SSN.

Vậy: $P(A) = \frac{3}{8}$

2) Gọi B là biến cố có ít nhất 1 mặt sấp xuất hiện.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho B là: $m_B = 3 + 3 + 1 = 7$.

Đó là các khả năng: xuất hiện 1 mặt sấp : SNN; NSN; NNS.

xuất hiện 2 mặt sấp: SSN; SNS; NSS.

xuất hiện 3 mặt sấp: SSS.

Vậy: $P(B) = \frac{7}{8}$

Nhận xét: Để tính xác suất của biến cố B ta có thể tính xác suất của biến cố $\overline{B}$ là biến cố không có mặt sấp nào suất hiện (NNN).

$$P(\overline{B}) = \frac{1}{8} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8})$$

3) Gọi C là biến cố nhiều nhất 1 mặt sấp xuất hiện.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho C là $m_C = 3 + 1 = 4$.

Đó là các khả năng: xuất hiện một mặt sấp: SNN; NSN; NNS.

không xuất hiện một mặt sấp nào: NNN.

Vậy: $P(C) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Bài 4: *Một hộp có đựng 9 chiếc thẻ có đánh số 1, 2, 3, ...9 trên đó.*

1) Rút ngẫu nhiên 3 thẻ và thu được một số có 3 chữ số. Tìm xác suất:

a) Để thu được một số chẵn.

b) Để thu được một số chia hết cho 5.

2) Rút ngẫu nhiên 2 thẻ và nhân hai số ghi trên thẻ với nhau. Tìm xác suất:

a) Để tích nhận được là số lẻ.

b) Để tích nhận được là số chẵn.

Giải:

1) Số các khả năng xảy ra: $A_9^3 = 504$.

a) Gọi A là biến cố số thu được là số chẵn.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho A: $m_A = 4 . A_8^2 = 224$.

Vậy: $P(A) = \frac{224}{504} = \frac{4}{9}$.

b) Gọi B là biến cố số thu được số chia hết cho 5.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho B là: $m_B = 1 . A_8^2 = 56$.

Vậy: $P(B) = \frac{56}{504} = \frac{1}{9}$.

2) Số các khả năng xảy ra $C_9^2 = 36$

a) Gọi C là biến cố tích 2 số nhận được là một số lẻ.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho C: $m_C = A_5^2 = 10$.

Vậy: $P(C) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

b) Gọi D là biến cố tích 2 số nhận được là một số chẵn.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho D: $m_D = 36 - 10 = 26$.

Vậy: $P(D) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.

Bài 5: *Có 5 nam và 5 nữ xếp ngồi ngẫu nhiên vào quanh một bàn tròn. Tìm xác suất để nam và nữ luôn được ngồi xen kẽ nhau.*

Giải:

Khi xếp 5 nam và 5 nữ vào một bàn tròn, số khả năng có thể xảy ra là: $n = 9!$.

Gọi A là biến cố nam và nữ luôn ngồi xen kẽ nhau.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho A là $m_A = 4!\ 5!$.

Vậy $P(A) = \frac{4!\,.\,5!}{9!} = \frac{1}{14}$.

Bài 6: *Trong một nhóm gồm 20 học sinh, trong đó 10 học sinh thích môn Toán, 12 học sinh thích môn Lý và 7 học sinh thích cả 2 môn Toán, Lý. Gọi ngẫu nhiên một học sinh. Tìm xác suất để:*

a) Học sinh đó thích ít nhất một trong hai môn Toán hoặc Lý.

b) Học sinh đó không thích môn nào trong hai môn đó.

Giải: Gọi ngẫu nhiên một học sinh trong số 20 học sinh của nhóm, số khả năng có thể xảy ra là: $n = 20$.

a) Gọi A là biến cố học sinh đó thích ít nhất là một trong hai môn Toán hoặc Lý.

Khi đó, số các khả năng thuận lợi cho A là: $m_A = 10 + 12 - 7 = 15$.

Vậy $P(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$.

b) Gọi B là biến cố học sinh đó không thích môn nào trong hai môn Toán và Lý. Khi đó số khả năng thuận lợi cho B là: $m_B = 20 - 15 = 5$

Vậy $P(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Nhận xét: Ta có biến cố A và B là hai biến cố đối lập nhau. Do đó $P(B)$ có thể được tính bằng cách: $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Bài 7: *Một hộp có đựng 6 viên bi đỏ và 4 viên bi màu xanh hoàn toàn giống nhau về hình thức. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi. Tìm xác suất của các biến cố sau:*

a) Lấy được 1 viên bi màu đỏ.

b) Lấy được ít nhất 1 viên bi màu đỏ.

c) Lấy được ít nhất mỗi màu một viên bi.

d) Lấy được các viên bi cùng màu.

Giải: Số các khả năng có thể xảy ra là $C_{10}^3 = 120$.

a) Gọi A là biến cố lấy được một viên bi màu đỏ.

Khi đó, số khả năng thuận lợi cho A là: $m_A = C_6^1.C_4^2 = 36$

Vậy $P(A) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

b) Gọi B là biến cố có ít nhất một viên bi màu đỏ.

Số khả năng thuận lợi cho B là: $m_B = C_6^1.C_4^2 + C_6^2.C_4^1 + C_6^3 = 116$.

Vậy: $P(B) = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$

c) Gọi C là biến cố lấy được ít nhất mỗi màu một viên.

Số khả năng thuận lợi cho C là: $m_C = C_6^1.C_4^2 + C_4^1.C_6^2 = 96$.

Vậy: $P(C) = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$.

d) Gọi D là biến cố lấy được hai viên bi cùng màu.

Số khả năng thuận lợi cho D là: $m_D = C_6^3 + C_4^3 = 24$.

Vậy: $P(D) = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$.

Nhận xét:

- Để tính xác suất của biến cố B ta có thể qui về biến cố đối lập với B là biến cố $\overline{B}$ lấy không được ít nhất một viên bi màu đỏ, tức là lấy được cả 3 bi xanh và $m_{\overline{B}} = C_4^3 = 4$.

Suy ra: $m_B = 120 - 4 = 116$.

Do đó: $P(B) = \dfrac{116}{120} = \dfrac{29}{30}$.

- Để tính xác suất của các biến cố C, D ta có thể biểu thị các biến cố đó dưới dạng tổng của các tổng của các biến cố xung khắc và áp dụng kết quả:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

Chẳng hạn: Gọi E là biến cố lấy được hai viên bi màu đỏ.

Gọi F là biến cố lấy được hai viên bi màu xanh.

Ta có: $D = E \cup F$; E, F xung khắc.

Suy ra: $P(D) = P(E) + P(F) = \dfrac{C_6^3}{C_{10}^3} + \dfrac{C_4^3}{C_{10}^3} = \dfrac{20}{120} + \dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{5}$.

Bài 8: *Một lớp có 20 học sinh nữ, trong đó có bạn Mai và 16 học sinh nam trong đó có bạn Thắng.*

) Chia lớp thành 4 tổ, mỗi tổ 9 học sinh. Tìm xác suất để số học sinh nam và nữ ở các tổ là đều nhau.

2) Chọn một ban cán sự lớp gồm 5 em học sinh để có ít nhất 2 nam và 2 nữ.

a) Tìm xác suất của biến cố chọn được ban cán sự lớp mà Mai và Thắng luôn được làm việc chung trong ban cán sự.

b) Tìm xác suất của biến cố chọn được ban cán sự mà Mai và Thắng không chịu làm việc chung.

Giải:

) Số khả năng có thể xảy ra khi chia 36 em học sinh thành 4 tổ, mỗi tổ 9 em là:

$$n = C_{36}^9.C_{27}^9.C_{18}^9.C_9^9$$

Gọi A là biến cố số học sinh nam và nữ ở các tổ đều nhau. Ta có số khả năng thuận lợi cho A là: $m_A = C_{20}^5.C_{16}^4.C_{15}^5.C_{12}^4.C_{10}^5.C_8^4.C_5^5.C_4^4$

Vậy: $P(A) = \dfrac{C_{20}^5.C_{16}^4.C_{15}^5.C_{12}^4.C_{10}^5.C_8^4.C_5^5.C_4^4}{C_{36}^9.C_{27}^9.C_{18}^9.C_9^9}$

2) Số khả năng có thể xảy ra khi chọn 5 học sinh vào ban cán sự lớp, trong đó có ít nhất 2 nam 2 nữ là:

$$n = C_{16}^2.C_{20}^3 + C_{20}^2.C_{16}^3 = 243200.$$

a) Gọi B là biến cố trong ban cán sự luôn có Mai và Thắng.

Ta có số khả năng thuận lợi cho B là:

$$m_B = C_{15}^1.C_{19}^2 + C_{19}^1.C_{15}^2 = 4560$$

Vậy: $P(B) = \frac{4560}{243200} = \frac{456}{24320}$.

b) Gọi C là biến cố chọn được ban cán sự mà Mai - Thắng không chịu làm việc chung.

Ta có số khả năng thuận lợi cho C là:

$$m_C = 243200 - 4560 = 238640$$

Vậy: $P(C) = \frac{238640}{243200}$.

Bài 9: *Một đội văn nghệ của trường gồm có 10 học sinh, trong đó lớp 11A có 4 em, lớp 11B có 3 em, lớp 11C có 3 em. Gặp ngẫu nhiên 3 học sinh trong nhóm đó. Tìm xác suất để:*

a) Ba học sinh ở 3 lớp khác nhau.

b) Trong đó có 2 học sinh của lớp 11A.

c) Cả 3 em đều là học sinh của lớp 11A.

Giải:

Số các khả năng có thể xảy ra là $C_{10}^3 = 120$.

a) Gọi A là biến cố ba học sinh là ở 3 lớp khác nhau.

Ta có, số khả năng thuận lợi cho A là: $m_A = C_4^1.C_3^1.C_3^1 = 36$.

Vậy $P(A) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

b) Gọi B là biến cố trong 3 học sinh có 2 học sinh lớp 11A.

Ta có, số khả năng thuận lợi cho B là: $m_B = C_4^2.C_6^1 = 36$.

Vậy $P(B) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

c) Gọi C là biến cố 3 học sinh đều là học sinh lớp 11A.

Ta có, số khả năng thuận lợi cho C là: $m_C = C_4^3 = 4$.

Vậy $P(C) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.

Bài 10: *Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số từ 0 đến 9. Tìm xác suất để số trên vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5.*

Giải:

Khi chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số từ 0 đến 9, ta có các khả năng có thể xảy ra là: $n = 10^5$.

Gọi A là biến cố để số trên vé không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5. Khi đó số các khả năng thuận lợi cho A là: $m_A = 9^5 + 9^5 - 8^5$.

(Vì có 9^5 số không có mặt chữ số 1.
9^5 số không có mặt chữ số 5.
Trong đó 8^5 số không có mặt chữ số 1 và 5.)

Suy ra $P(A) = \dfrac{9^5 + 9^5 - 8^5}{10^5} = 2(0,9)^5 - (0,8)^5 = 0,8533$.

Nhận xét: Trong bài này ta có thể biểu diễn biến cố A dưới dạng tổng các biến cố:

B là biến cố trên vé không có mặt chữ số 1.

C là biến cố trên vé không có mặt chữ số 5.

Khi đó: $B \cap C$ là biến cố trên vé không có mặt chữ số 1 và 5.

Ta có: $P(B) = P(C) = (0,9)^5$; $P(B \cap C) = (0,5)^5$

Suy ra: $P(A) = P(B \cup C) = (0,9)^5 + (0,9)^5 - (0,5)^5 = 0,8533$

Và như vậy, một cách tổng quát:

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$: cũng được gọi là công thức cộng xác suất trong trường hợp B, C không xung khắc với nhau.

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Gieo 2 đồng xu cân đối và đồng chất.
1) Tìm không gian các biến cố sơ cấp.
2) Tìm xác suất của các biến cố:
   a) Cả hai đồng xu đều xuất hiện mặt sấp.
   b) Một đồng xu xuất hiện mặt sấp.
   c) Có ít nhất một đồng xu xuất hiện mặt sấp.

Bài 2: Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất.
1) Mô tả không gian các biến cố sơ cấp.
2) Tìm xác suất của các biến cố sau:
   a) A là biến cố tổng số chấm trên mặt hai con xúc xắc là 7.
   b) B là biến cố hiệu số chấm trên mặt hai con xúc xắc là 1.
   c) C là biến cố tích số chấm trên mặt hai con xúc xắc là 12.

Bài 3: Người ta viết 4 từ HỌC, SINH, GIỎI, THI lên 4 tấm bìa rồi xếp ngẫu nhiên theo một trật tự tuỳ ý 4 tấm bìa đó thành một dãy. Tìm xác suất để dãy từ xếp ra là THI HỌC SINH GIỎI.

Bài 4: Giờ ra chơi các bạn Mai, Lan, Hùng, Nam, Hữu và Huệ đứng thành một vòng tròn chơi đá cầu. Tìm xác suất để hai bạn Mai và Hữu luôn đứng cạnh nhau.

Bài 5: Một nhóm học sinh gồm 20 em được đi tham gia thực tế gồm 14 nam và 6 nữ.

1) Chia nhóm học sinh thành 2 tổ, mỗi tổ có 10 em. Tìm xác suất để số học sinh nam và nữ trong hai tổ đều nhau.

2) Chọn ngẫu nhiên 3 em học sinh trong nhóm đó để làm một ban điều hành. Tìm xác suất của các biến cố:

a) Trong đó có một học sinh nam.
b) Trong đó có ít nhất một nam.
c) Trong đó có ít nhất một nam và một nữ.
d) Trong đó cả 3 em đều nữ.

Bài 6: Có 7 em nam và 5 em nữ được xếp ngồi quanh một bàn tròn. Tìm xác suất để không có bạn nữ nào được ngồi cạnh nhau.

Bài 7: Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: Rút ngẫu nhiên 5 thẻ. Tìm xác suất để:

a) Các thẻ ghi 1, 2, 3 được rút.
b) Có đúng một thẻ ghi số 1, 2, 3 được rút.
c) Không thẻ nào trong 3 thẻ ghi số 1, 2, 3 được rút.

Bài 8: Trong hộp số có 4 chữ số 0, 1, 2, 3. Một cháu nhỏ mẫu giáo xếp ngẫu nhiên 4 chữ số đó thành một hàng. Tìm xác suất để:

a) Số xếp được có 4 chữ số.
b) Số xếp được có 4 chữ số chia hết cho 3.
c) Số xếp được có 4 chữ số chia hết cho 2.

Bài 9: Có 15 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm, được bỏ ngẫu nhiên vào 3 cái hộp, mỗi hộp có 5 sản phẩm. Tìm xác suất để:

a) Ở hộp 1 chỉ có 1 phế phẩm.
b) Các hộp đều có phế phẩm.
c) Các phế phẩm đều ở hộp thứ 3.

Bài 10: Tổng kết năm học 2006 - 2007, lớp 10A của một trường THPT có 4 em học lực loại giỏi, 15 em học lực loại khá, 20 em học lực trung bình và 1 em học lực yếu. Chọn ngẫu nhiên 3 em của lớp. Tìm xác suất để:

a) Cả ba em đều là học sinh khá.
b) Ba em có học lực khác nhau.

Bài 11: Có 5 tấm thẻ trên đó có ghi các chữ số 0, 1, 3, 6, 9. Rút ngẫu nhiên 4 trong 5 tấm thẻ ở trên và xếp thành 1 hang ngang để được một số. Tìm xác suất để:

a) Số xếp được có 4 chữ số.
b) Số xếp được có 4 chữ số không bắt đầu từ số 13.
c) Số xếp được là số chẵn có 4 chữ số khác nhau và lớn hơn 5000.
d) Số xếp được có 4 chữ số chia hết cho 3.

§ 5. XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN - BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Cho *A* và *B* là hai biến cố bất kỳ cùng liên quan với 1 phép thử.

- Nếu $P(A) > 0$, ta gọi tỉ số $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ là xác suất điều kiện của biến cố B với điều kiện biến cố A xảy ra và kí hiệu: $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

- Tương tự, nếu $P(B) > 0$ thì $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Từ đó ta suy ra:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A) = P(B).P(A/B) \qquad (1)$$

2. Hai biến cố *A* và *B* được gọi là độc lập nếu:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) \qquad (2)$$

Như vậy: Nếu $P(A) \,.\, P(B) \neq 0$ thì A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A/B) = P(A)$ hoặc $P(B/A) = P(B)$.

Công thức (1) và (2) được gọi là công thức nhân xác suất.

B. CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: **Tính xác suất có điều kiện.**

Phương pháp:

Áp dụng công thức xác suất điều kiện.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{nếu } P(B) > 0$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{nếu } P(A) > 0.$$

Bài 1: *Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 2 lần. Tính xác suất của biến cố tổng số chấm trong 2 lần gieo không bé hơn 10 nếu:*

a) Lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 5 chấm.

b) Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất 1 lần.

Giải:

Gọi A là biến cố tổng số chấm trong 2 lần gieo không bé hơn 10.
B là biến cố gieo lần đầu xuất hiện mặt 5 chấm.
C là biến cố có mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần.

Khi đó, ta có:

$A = \{(4, 6); (6, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 5); (6, 6)\}$

$B = \{(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6)\}$

$C = \{(5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (1, 5); (2, 5); (3, 5); (4, 5); (6, 5)\}$

a) $$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$$

b) $$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{3}{11}.$$

Bài 2: *Một cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con. Rút liên tiếp không hoàn lại hai con bài. Tìm xác suất để lần thứ 2 rút được con Át với điều kiện lần thứ nhất cũng rút được con Át.*

Giải: Gọi A_i là biến cố lần thứ i rút được con Át ($i = 1, 2$).

Ta có số khả năng xảy ra của biến cố $A_1 \cap A_2$ là $n = 52 . 51$.

số khả năng thuận lợi cho biến cố $A_1 \cap A_2$ là $m = 4 . 3$.

Vậy $$P(A_1 \cap A_2) = \frac{4.3}{52.51} = \frac{1}{13.17}.$$

Khi đó: $$P(A_2 / A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{13.17}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{17}.$$

Dạng 2: Tính xác suất của tích các biến cố.

Phương pháp: *Áp dụng các công thức nhân xác suất.*

- *Nếu A, B không độc lập thì:*

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B/A) = P(B).P(A/B).$$

- *Nếu A, B độc lập thì:*

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B).$$

Bài 1: *Một hộp có đựng 4 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng sản phẩm một, không bỏ trở lại để kiểm tra cho tới khi lấy ra hai phế phẩm thì thôi. Tính xác suất của biến cố việc kiểm tra chỉ dừng lại ở sản phẩm thứ 2.*

Giải:

Gọi A_i là biến cố sản phẩm kiểm tra lần thứ i là phế phẩm.

Gọi A là biến cố việc kiểm tra dừng lại ở sản phẩm thứ 2.

Ta có: $A = A_1 \cap A_2$.

Suy ra: $$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) . P(A_2 / A_1) = \frac{2}{6}.\frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Bài 2: *Một hộp gồm có 6 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ.*

1) Lấy ngẫu nhiên liên tiếp không hoàn lại hai bi từ hộp. Tìm xác suất để 2 bi lấy được đều đỏ.

2) Lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi, nếu là bi xanh thì bỏ nó lại và thêm ba bi xanh nữa, nếu là bi đỏ thì bỏ nó vào lại và thêm một bi đỏ nữa. Sau đó, lần thứ 2 lấy ngẫu nhiên ra một viên bi.

a) Tìm xác suất để 2 viên bi lấy được đều là màu xanh.

b) Tìm xác suất để 2 viên bi lấy được khác màu.

Giải:

1) Gọi A_i là biến cố lần thứ i lấy được viên bi đỏ ($i = 1, 2$).

A là biến cố cả hai bi lấy được đều đỏ.

Ta có: $A = A_1 \cap A_2$.

Suy ra: $P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2 / A_1) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$.

2) Gọi B_i là biến cố lần thứ i lấy được bi xanh ($i = 1, 2$).

Khi đó $\overline{B_i}$ là biến cố lần thứ i lấy được bi đỏ.

a) Gọi B là biến cố cả hai bi lấy được đều xanh.

Ta có: $B = B_1 \cap B_2$.

Suy ra: $P(B) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1).P(B_2 / B_1) = \frac{6}{10}.\frac{9}{13} = \frac{27}{65}$.

b) Gọi C là biến cố 2 viên bi lấy được là khác màu. Khi đó biến cố C xảy ra 1 trong 2 trường hợp.

+ Hoặc lần 1 lấy bi xanh, lần 2 lấy bi đỏ tức là xảy ra biến cố $B_1 \cap \overline{B_2}$ *và* $P(B_1 \cap \overline{B_2}) = P(B_1).P(\overline{B_2} / B_1) = \frac{6}{10}.\frac{4}{13} = \frac{12}{65}$

+ Hoặc lần 1 lấy bi đỏ, lần 2 lấy bi xanh tức là xảy ra biến cố $\overline{B_1} \cap B_2$ *và* $P(\overline{B_1} \cap B_2) = P(\overline{B_1})\ P(B_2 / \overline{B_1}) = \frac{4}{10}.\frac{6}{11} = \frac{12}{55}$

Vậy $P(C) = \frac{12}{65} + \frac{12}{55} = \frac{288}{715}$.

Nhận xét: Ta thấy rằng biến cố C là biến cố đối lập với biến cố $\overline{C}$ là lấy được 2 viên bi cùng màu.

Ta gọi B là biến cố lấy được 2 bi đều màu xanh.

Ta gọi D là biến cố lấy được 2 bi đều màu đỏ.

Khi đó $\overline{C} = B \cup D$ (B và D xung khắc) $\Rightarrow P(\overline{C}) = P(B) + P(D)$.

Trong $P(B) = \frac{27}{65}$.

$P(D) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = P(\overline{B_1}).P(\overline{B_2} / \overline{B_1}) = \frac{4}{10}.\frac{5}{11} = \frac{2}{11}$.

Vậy $P(\overline{C}) = \frac{27}{65} + \frac{2}{11} = \frac{427}{715}$.

Do đó $P(C) = \frac{288}{715}$.

Bài 3: *Hộp 1 có đựng 7 viên bi trong đó có 3 bi đỏ và 4 bi xanh. Hộp 2 có đựng 7 viên bi trong đó có 2 bi đỏ và 5 bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tìm xác suất của các biến cố sau:*

a) Hai bi lấy ra đều đỏ.

b) Hai bi lấy ra là cùng màu.

Giải:

Gọi A_i là biến cố bi lấy được từ hộp thứ i là bi đỏ ($i = 1, 2$).

Khi đó, $\overline{A_i}$ là biến cố bi lấy được từ hộp thứ i là bi xanh.

a) Gọi A là biến cố 2 viên bi lấy được đều đỏ.

Ta có $A = A_1 \cap A_2$; A_1, A_2 là hai biến cố độc lập.

Suy ra $P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = \frac{3}{7}.\frac{2}{7} = \frac{6}{49}$.

b) Gọi B là biến cố 2 viên bi lấy được đều màu xanh.

C là biến cố 2 viên bi lấy được cùng màu.

Khi đó $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$; $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ là hai biến cố độc lập.

Suy ra $P(B) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}) = \frac{4}{7}.\frac{5}{7} = \frac{20}{49}$.

Mặt khác $C = A \cup B$; A, B là các biến cố xung khắc.

Suy ra $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{6}{49} + \frac{20}{49} = \frac{26}{49}$.

Bài 4: *Hai người độc lập cùng bắn mỗi người 1 viên đạn vào cùng một mục tiêu. Xác suất bắn trúng bia của người thứ nhất, thứ hai lần lượt là: 0,3; 0,5. Tính xác suất của các biến cố sau:*

a) Cả hai người đều bắn trúng.

b) Có một người bắn trúng.

c) Có ít nhất một người bắn trúng.

Giải:

Gọi A_i là biến cố người thứ i bắn trúng bia. ($i = 1, 2$)

$\overline{A_i}$ là biến cố người thứ i bắn không trúng bia.

a) Gọi A là biến cố cả hai người đều bắn trúng bia.

Ta có: $A = A_1 \cap A_2$; A_1, A_2 là hai biến cố độc lập.

Suy ra $P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = 0{,}3 \,.\, 0{,}5 = 0{,}15$.

b) Gọi B là biến cố có một người bắn trúng bia.

Ta có biến cố B xảy ra khi hoặc một trong hai trường hợp sau xảy ra:

+ Hoặc biến cố $A_1 \cap \overline{A_2}$ xảy ra và:

$$P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(A_1).P(\overline{A_2}) = 0,3.0,5 = 0,15.$$

+ Hoặc biến cố $\overline{A_1} \cap A_2$ xảy ra và:

$$P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}).P(A_2) = 0,7.0,5 = 0,35.$$

Vậy: $P(B) = 0,15 + 0,35 = 0,5$.

Nhận xét: như vậy ta có thể viết: $B = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$.

c) Gọi C là biến cố có ít nhất một người bắn trúng bia.

Khi đó, C xảy ra khi hoặc 1 trong 3 khả năng sau xảy ra:

+ Xảy ra biến cố $A_1 \cap \overline{A_2}$ và $P(A_1 \cap \overline{A_2}) = 0,15$.

+ Xảy ra biến cố $\overline{A_1} \cap A_2$ và $P(\overline{A_1} \cap A_2) = 0,35$.

+ Xảy ra biến cố $A_1 \cap A_2$ và $P(A_1 \cap A_2) = 0,15$.

Từ đó: $P(C) = 0,15 + 0,35 + 0,15 = 0,65$.

Nhận xét:

- Như vậy biến cố C có thể viết là:

$$C = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2)$$

- Để tính xác suất của biến cố C ta có thể qui về tính xác suất biến cố đối lập với C là:

$$\overline{C} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \Rightarrow P(\overline{C}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}) = 0,7 \,.\, 0,5 = 0,35.$$

Vậy $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,35 = 0,65$.

Bài 5: *Có hai hộp đựng bi hoàn toàn giống nhau về hình thức.*

Hộp 1 có 7 viên bi trắng và 3 viên bi đen.

Hộp 2 có 6 viên bi trắng và 4 viên bi đen.

Lấy ngẫu nhiên 1 hộp rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên ra 1 viên bi. Tìm xác suất để viên bi đó là viên bi trắng.

Giải:

Gọi A_i là biến cố lấy được hộp thứ i ($i = 1, 2$).

A là biến cố lấy được viên bi trắng.

Khi đó, ta có: $A = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2)$

Suy ra
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) \\ &= P(A_1).P(A / A_1) + P(A_2).P(A / A_2) \\ &= \frac{1}{2}.\frac{7}{10} + \frac{1}{2}.\frac{6}{10} = \frac{13}{20}. \end{aligned}$$

Nhận xét: A_1, A_2 là hai biến cố xung khắc và $A_1 \cup A_2 = \Omega$.

Chú ý: Các công thức nhân xác suất có thể mở rộng cho trường hợp tổng quát.

Chẳng hạn với $n = 3$, ta có:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2 / A_1).P(A_3 / A_1 \cap A_2).$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2).P(A_3)$$ nếu A_1, A_2, A_3 độc lập.

Như vậy $\forall n \in N$, ta có:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1).P(A_2 / A_1)...P(A_n / A_1 \cap A_2 ... \cap A_{n-1}).$$

$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1).P(A_2)...P(A_n)$ nếu các A_i đôc lập với nhau.

Bài 6: *Một thủ kho có một chùm chìa khoá gồm 10 chiếc hình thức giống nhau nhưng trong đó chỉ có 3 chìa là mở được kho. Anh ta mở ngẫu nhiên từng chìa khoá một cho tới khi mở được kho. Tìm xác suất để:*

a) Anh ta mở được kho ở lần thứ 3.

b) Anh ta mở được kho mà không quá 3 lần mở.

Giải:

Gọi A_i là biến cố lần thứ i mở được kho. $(i = \overline{1, 3})$

$\overline{A_i}$ là biến cố lần thứ i không mở được kho.

a) Gọi A là biến cố người thủ kho mở được khoá ở lần mở thứ 3.

Ta có: $A = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$.

Suy ra: $P(A) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2} / \overline{A_1}).P(A_3 / \overline{A_1} \cap \overline{A_2})$

$$= \frac{7}{10}.\frac{6}{9}.\frac{3}{8} = \frac{7}{40}.$$

b) Gọi B là biến cố người thủ kho mở được khoá mà không quá 3 lần.

Ta có $\overline{B}$ là biến cố đối lập với B (là biến cố anh ta mở khoá mà phải quá 3 lần). Khi đó $\overline{B} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

Suy ra:

$$P(A) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2} / \overline{A_1}).P(\overline{A_3} / \overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \frac{7}{10}.\frac{6}{9}.\frac{5}{8} = \frac{7}{24}$$

Vậy: $P(B) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}$.

Nhận xét: Ta có thể tính xác suất của biến cố B bằng cách xét 3 khả năng. (Gọi B_i là biến cố anh ta mở được khoá ở lần mở thứ i)

+ Anh ta mở được khoá ở lần mở thứ nhất tức là xảy ra biến cố B_1

Ta có $B_1 = A_1 \Rightarrow P(B_1) = P(A_1) = \frac{3}{10}$.

+ Anh ta mở được khoá ở lần mở thứ hai tức là xảy ra biến cố B_2

Ta có $B_2 = \overline{A_1} \cap A_2 \Rightarrow P(B_2) = P(\overline{A_1}).P(A_2 / \overline{A_1}) = \frac{7}{10}.\frac{3}{9} = \frac{7}{30}$.

+ Anh ta mở được khoá ở lần mở thứ ba tức là xảy ra biến cố B_3.

Ta có $B_3 = A \Rightarrow P(B_3) = \frac{7}{40}$

Vậy $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$

$$\Rightarrow P(B) = P(B_1) + P(B_2).P(B_3) = \frac{3}{10} + \frac{7}{30} + \frac{7}{40} = \frac{17}{24}.$$

Bài 7: *Một nồi hơi có 3 van bảo hiểm hoạt động độc lập với xác suất hỏng của van 1, van 2, van 3 trong khoảng thời gian t tương ứng là 0,1; 0,2; 0,3. Nồi hơi hoạt động an toàn nếu như có ít nhất một van không hỏng. Tìm xác suất để nồi hơi hoạt động an toàn trong khoảng thời gian t.*

Giải:

Gọi A_i là biến cố van thứ i bị hỏng trong thời gian t.

A là biến cố nồi hơi hoạt động an toàn trong thời gian t.

Khi đó, $\overline{A}$ là biến cố nồi hơi hoạt động không an toàn trong thời gian t.

Ta có $\overline{A} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$; A_1, A_2, A_3 là các biến cố độc lập

Suy ra $P(\overline{A}) = P(A_1).P(A_2).P(A_3) = 0,1.0,2.0,3 = 0,006$

Do đó $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,006 = 0,994.$

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 2 lần. Giả sử số chấm xuất hiện trong 2 lần gieo là khác nhau. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Tổng số chấm của 2 lần gieo là 8.
b) Hiệu số của 2 lần gieo là 2.
c) Ít nhất 1 lần xuất hiện mặt 1 chấm.
d) Tích số chấm của 2 lần gieo là 12.
e) Tổng số chấm không vượt quá 5.

Bài 2: Một hộp có đựng 4 bi đỏ và 3 bi xanh. Lấy lần lượt (không hoàn trở lại) từ hộp ra 2 viên bi. Tìm xác suất để lần thứ 2 lấy được viên bi màu đỏ biết rằng lần thứ nhất đã lấy được bi đỏ.

Bài 3: Chọn ngẫu nhiên 2 trong số trong tập hợp các chữ số $\{1;2;...;7\}$. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Tích 2 số là chẵn.
b) Tích 2 số có ít nhất 1 số nguyên tố.
c) Tích 2 số là chẵn nếu biết rằng trong 2 số đó có đúng 1 số nguyên tố.

Bài 4: Có 6 chiếc thẻ trên đó ghi các số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Lấy ngẫu nhiên 3 chiếc thẻ và xếp thành 1 hàng ngang để được 1 số có 3 chữ số. Tìm xác suất để:

a) Xếp được 1 số chẵn.
b) Xếp được 1 số có tổng 2 số cuối là 3.
c) Xếp được 1 số chẵn nếu biết rằng tổng 2 số cuối là 3.

Bài 5: Trong thời gian có dịch bệnh ở một vùng dân cư. Cứ 100 người bệnh thì phải có 20 người đi cấp cứu. Xác suất gặp người đi cấp cứu do mắc phải dịch ở vùng đó là 0,08. Tìm tỉ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó.

Bài 6: Xác suất để 1 học sinh thi đỗ đại học lần đầu là 0,6. Nếu thi trượt thì học sinh đó thi lại và xác suất đỗ của lần thi lại là 0,75. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh. Tính xác suất để học sinh đó:

a) Không thi đỗ lần đầu. b) Thi đỗ.

Bài 7: Một cỗ bài có 52 con, lấy ngẫu nhiên lần lượt từng con. Tính xác suất sao cho con thứ 2 là con Át nếu:

a) Lấy lần lượt không hoàn lại. b) Lấy lần lượt có hoàn lại.

Bài 8: Một hộp có 12 bi trong đó có 7 bi đỏ và 5 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 1 bi từ hộp. Và không để ý tới màu của nó, sau đó lại lấy tiếp 1 viên bi nữa. Tìm xác suất để viên bi lấy ra lần thứ 2 là bi đỏ.

Bài 9: Hai hộp đựng bi hoàn toàn giống nhau về hình thức. Hộp 1 có 5 bi vàng và 4 bi xanh. Hộp 2 có 6 bi vàng và 3 bi xanh.

1) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi. Tính xác suất để:

a) Hai bi lấy được cùng màu xanh.

b) Hai bi lấy được là cùng màu.

c) Hai bi lấy được là khác màu

2) Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 2 bi. Tìm xác suất để:

a) Các viên bi lấy được cùng màu xanh.

b) Các viên bi lấy được cùng màu.

c) Các viên bi lấy được có bi màu vàng và xanh bằng nhau.

3) Lấy ngẫu nhiên 1 hộp, rồi từ hộp đó lấy ra 1 bi. Tìm xác suất để viên bi đó có màu xanh.

4) Lấy ngẫu nhiên 1 hộp rồi từ hộp đó lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi. Tìm xác suất để 2 bi cùng màu.

Bài 10: Có một hộp đựng 4 chính phẩm và 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên lần lượt từng sản phẩm không bỏ trở lại để kiểm tra cho tới khi lấy được 2 phế phẩm thì dừng lại. Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Việc kiểm tra dừng lại ở sản phẩm thứ 3.

b) Nếu việc kiểm tra dừng lại ở sản phẩm thứ 3. Tìm xác suất để sản phẩm kiểm tra lần thứ nhất là chính phẩm.

Bài 11: Bắn 3 viên đạn độc lập vào 1 mục tiêu. Xác suất trúng đích của viên đạn thứ nhất, thứ hai, thứ ba tương ứng là: 0,3; 0,4; 0,5. Tìm xác suất để:

a) Có 1 viên trúng đích.

b) Không có viên nào trúng.

c) Có ít nhất 1 viên trúng.

§ 6. BIẾN NGẪU NHIÊN - CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA NÓ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT:

1. Biến ngẫu nhiên:

a) *Định nghĩa:* Hàm số X xác định trên không gian các biến cố sơ cấp Ω và nhận các giá trị $x_1, x_2, \dots x_n \dots$ trong tập số thực R được gọi là biến ngẫu nhiên rời rạc nếu tập $\{\omega / X(\omega) = x_n\}$ là các biến cố ngẫu nhiên $\forall n = 1, 2 \dots$

Tập $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$ được gọi là tập các giá trị của biến ngẫu nhiên X.

b) *Bảng phân phối xác suất của X:*

Cho biến ngẫu nhiên X có các giá trị nhận được $x_1, x_2, \dots x_n$.

Ta gọi dãy các $p_i = P[X = x_i]$ $\forall i = \overline{1, n}$ là phân phối xác suất của X.

Ta có thể viết như sau:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Gọi là bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X.

Chú ý: $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Bảng trên cho biết luật phân phối xác suất của X.

2. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên.

Cho X là biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

a) Kì vọng toán của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $E(X)$ và xác định bởi:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

b) Phương sai của biến ngẫu nhiên X, kí hiệu $D(X)$ và xác định bởi:

$$D(X) = (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + \dots + (x_n - a)^2 p_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i \quad (1)$$

Với $a = E(X)$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$: được gọi là độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X.

Chú ý: Ta có thể chứng minh được rằng:

$$D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_n^2 p_n - E(X)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 \quad (2)$$

Và trong thực hành tính toán ta có thể sử dụng công thức này để tính phương sai đơn giản hơn công thức (1) ở một số trường hợp.

B. CÁC DẠNG TOÁN:

Dạng 1: **Xác định bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên.**

*** Phương pháp:**

Để xác định bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X:

- *Tìm giá trị nhận được của biến ngẫu nhiên X:* $x_1, x_2, \ldots x_n$
- *Tính các xác suất tương ứng (Áp dụng định nghĩa hoặc các công thức):*

$$P_i = P[X = x_i] \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Từ đó suy ra bảng phân phối xác suất:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Chú ý: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Bài 1: *Tung con xúc xắc cân đối đồng chất. Gọi X là số chấm xuất hiện khi tung. Xác định bảng phân phối xác suất của X.*

Giải:

- Các giá trị có thể nhận được của X là 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Các xác suất tương ứng là.

$$P_1 = P[X=1] = \frac{1}{6} = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6.$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Bài 2: *Tung hai đồng xu cân đối đồng chất như nhau. Gọi X là số mặt sấp khi tung 2 đồng xu đó. Tìm bảng phân phối xác suất của X.*

Giải: Khi tung hai đồng xu cân đối và đồng chất.

$$\Omega = \{NN, NS, SN, SS\}$$

Khi đó:
- Các giá trị có thể nhận được của X là 0, 1, 2.
- Các xác suất tương ứng.

$$P_0 = P[X = 0] = \frac{1}{4}. \qquad P_1 = P[X = 1] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$P_2 = P[X = 2] = \frac{1}{4}$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Bài 3: *Một hộp có đựng 4 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi. Gọi X là số viên bi màu đỏ có trong 3 viên bi lấy ra. Tìm luật phân phối xác suất của X.*

Giải: Khi lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 3 viên bi, số các khả năng có thể xảy ra là: $n = C_{10}^3 = 120$.

Khi đó: - Các giá trị có thể nhận được của X là 0, 1, 2, 3.

- Các xác suất tương ứng là.

$$P_0 = P[X=0] = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

$$P_1 = P[X=1] = \frac{C_4^1 . C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

$$P_2 = P[X=2] = \frac{C_4^2 . C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

$$P_3 = P[X=3] = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

Bài 4: *Một xạ thủ có 4 viên đạn, xạ thủ đó bắn từng viên cho đến khi có phát trúng hoặc hết đạn dừng lại. Gọi X là số viên đạn đã bắn. Lập bảng phân phối xác suất của X, biết rằng xác suất trúng đích của xạ thủ đó ở mỗi phát đều bằng 0,7.*

Giải:

Gọi A_i là biến cố viên đạn thứ i bắn trúng đích. $i = \overline{1, 4}$

Khi đó, $\overline{A_i}$ là biến cố viên đạn thứ i bắn không trúng đích.

Ta có: - Các giá trị có thể nhận được của X là 1; 2; 3; 4.

- Các xác suất tương ứng là:

$P_1 = P[X = 1] = P(A_1) = 0{,}7.$

$$P_2 = P[X=2] = P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}).P(A_2) = 0{,}3 \,.\, 0{,}7 = 0{,}21$$

$$P_3 = P[X=3] = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)$$
$$= 0{,}3 \,.\, 0{,}3 . 0{,}7 = 0{,}063$$

$$P_4 = P[X=4] = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})$$
$$= 0,3\ .0,3.0,3 = 0,027$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

X	1	2	3	4
P	0,7	0,21	0,063	0,027

Bài 5: *Có hai lô hàng đựng sản phẩm, lô thứ nhất có 10 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu, lô thứ hai có 12 sản phẩm tốt và 3 sản phẩm xấu.*

1) Lấy ngẫu nhiên từ một lô hàng ra 1 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm tốt có trong 2 sản phẩm lấy ra. Tìm bảng phân phối xác suất của X.

2) Lấy ngẫu nhiên một lô hàng, rồi từ lô hàng đó lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm. Gọi Y là số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm lấy ra. Tìm bảng phân phối xác suất của Y.

Giải:

1) Gọi A_i là biến cố lấy được sản phẩm tốt ở hộp thứ *i*. (i = 1, 2)

$\overline{A_i}$ là biến cố lấy được sản phẩm xấu ở hộp thứ *i*.

- Các giá trị có thể nhận được của X là 0, 1, 2.
- Các xác suất tương ứng.

$$P_0 = P[X=0] = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}) = \frac{5}{15}\cdot\frac{3}{15} = \frac{1}{15}$$

$$P_1 = P[X=1] = P\left[(A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)\right]$$
$$= P(A_1).P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}).P(A_2)$$
$$= \frac{10}{15}\cdot\frac{3}{15} + \frac{5}{15}\cdot\frac{12}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$P_2 = P[X=2] = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2) = \frac{10}{15}\cdot\frac{12}{15} = \frac{8}{15}$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$

2) Gọi B_i là biến cố chọn được lô hàng thứ *i*. $i = \overline{1, 2}$

- Các giá trị có thể nhận được của Y là 0, 1, 2.
- Các xác suất tương ứng.

$$P_0 = P[Y=0] = P(B_1).P[Y=0/B_1] + P(B_2).P[Y=0/B_2]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{C_5^2}{C_{15}^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{C_3^2}{C_{15}^2} = \frac{10}{210} + \frac{3}{210} = \frac{13}{210}$$

$$P_1 = P\left[Y=1\right] = P(B_1).P\left[Y=1/B_1\right] + P(B_2).P\left[Y=1/B_2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{C_{10}^1.C_5^1}{C_{15}^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{C_{12}^1.C_3^1}{C_{15}^2} = \frac{86}{210}$$

$$P_2 = P\left[Y=2\right] = P(B_1).P\left[Y=2/B_1\right] + P(B_2).P\left[Y=2/B_2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{C_{10}^2}{C_{15}^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{111}{210}$$

Vậy bảng phân phối xác suất của Y là:

X	0	1	2
P	$\frac{13}{210}$	$\frac{86}{210}$	$\frac{111}{210}$

Dạng 2: Tính các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên.

*** Phương pháp:**

Để tính các tham số đặc trưng của biến ngẫu nhiên.

- Xác định phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

- Áp dụng các công thức tính E(X), D(X) và σ(X).

Chú ý: Kỳ vọng toán E(X) chính là giá trị trung bình của các giá trị đạt được của biến ngẫu nhiên X.

Bài 1: *Cho biến ngẫu nhiên X có bảng phân phối xác suất như sau:*

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Tính E(X), D(X) và σ(X).

Giải:

$E(X) = 0 \,.\, 0{,}25 + 1 \,.\, 0{,}5 + 2 \,.\, 0{,}25 = 1.$

$D(X) = (0-1)^2.0{,}25 + (1-1)^2.\,0{,}5 + (2-1)^2.\,0{,}25 = 0{,}5.$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71.$

Bài 2: *Quan sát điểm bài thi môn Toán học kì I của lớp 11A ở một trường THPT ta thu được kết quả sau:*

Số điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	5	7	10	8	7	3

Gọi X là số điểm đạt được của bài thi môn Toán học kỳ I của lớp 11A.

a) Lập bảng phân phối xác suất.

b) Tính điểm trung bình đạt được của bài thi môn Toán học kỳ I lớp đó.

c) Tính phương sai D(X) và độ lệch chuẩn σ(X).

Giải:

a) - Các gí trị có thể nhận được của X là: 5; 6; 7; 8; 9; 10.

- Các xác suất tương ứng:

$$P_1 = P[X=5] = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \qquad P_2 = P[X=6] = \frac{7}{40}$$

$$P_3 = P[X=7] = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \qquad P_4 = P[X=8] = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}.$$

$$P_5 = P[X=9] = \frac{7}{40} \qquad P_6 = P[X=10] = \frac{3}{40}.$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{40}$

b) Điểm trung bình đạt được là:

$$E(X) = 5\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{7}{40} + 7\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{5} + 9\cdot\frac{7}{40} + 10\cdot\frac{3}{40}$$

$$= \frac{20+42+70+64+63+30}{40} = \frac{289}{40} \approx 7,3$$

c)

$$D(X) = (5-7,3)^2\cdot\frac{1}{8} + (6-7,3)^2\cdot\frac{7}{40} + (7-7,3)^2\cdot\frac{1}{4}$$

$$+ (8-7,3)^2\cdot\frac{1}{5} + (9-7,3)^2\cdot\frac{7}{40} + (10-7,3)^2\cdot\frac{3}{40} \approx 2,86.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} \approx 1,69.$$

Nhận xét, trong trường hợp này, vì $E(X)$ là số thập phân vì thế tính $D(X)$ theo công thức trên phức tạp hơn.

Ta có thể sử dụng cách khác:

Áp dụng công thức: $D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - (EX)^2$

Ta có:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 5^2\cdot\frac{1}{8} + 6^2\cdot\frac{7}{40} + 7^2\cdot\frac{1}{4} + 8^2\cdot\frac{1}{5} + 9^2\cdot\frac{7}{40} + 10^2\cdot\frac{3}{40}$$

$$= \frac{25\,.\,5 + 36\,.\,7 + 49\,.\,10 + 64\,.\,8 + 81\,.\,7 + 100\,.\,3}{40} = \frac{2246}{40} = 56,15.$$

Suy ra $D(X) = 56,15 - (7,3)^2 = 51,15 - 53,29 = 2,86$.

$$\sigma(X) = \sqrt{2,86} \approx 1,69.$$

Bài 3: *Một bài kiểm tra trắc nghiệm có 4 câu, mỗi câu có 5 phương án trả lời trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Nếu trả lời đúng thì được 5 điểm, nếu trả lời sai thì được 0 điểm. An làm bài thi bằng cách ở mỗi câu chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Gọi X là số điểm mà An nhận được.*

a) Lập bảng phân phối xác suất của X.

b) Tính E(X) và D(X).

Giải:

a) Gọi A_i là biến cố câu hỏi thứ i An trả lời đúng. $i = \overline{1,4}$

Ta có: - Các giá trị nhận được của X là: 0; 5; 10; 15; 20.

- Các xác suất tương ứng.

$$P[X=0] = P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right)$$

$$= P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).\ P(\overline{A_3}).\ P(\overline{A_4}) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 0{,}4096$$

$$P[X=5] = P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right) + P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right)$$

$$+ P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cap \overline{A_4}\right) + P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4\right)$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4^3}{5^3} = \frac{4^{\ 4}}{5^4} = 0{,}4096$$

Tương tự:

$$P[X=10] = 6\left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{6\ .\ 4^2}{54} = 0{,}1536$$

$$P[X=15] = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4^2}{54} = 0{,}0256$$

$$P[X=20] = \frac{1}{54} = 0{,}0016$$

Vậy bảng phân phối xác suất của X là:

X	0	5	10	15	20
P	0,4096	0,4096	0,1536	0,0256	0,0016

2) $E(X) = 0\ .\ 0{,}4096 + 5\ .\ 0{,}4096 + 10\ .\ 0{,}1536 + 15\ .\ 0{,}0256 + 20\ .\ 0{,}0016 = 4$

$D(X) = (0-4)^2\ .\ 0{,}4096 + (5-4)^2\ .\ 0{,}4096 + (10-4)^2\ .\ 0{,}1536 + (15-4)^2\ .\ 0{,}0256 + (20-4)^2\ .\ 0{,}0016 = 16$

Bài 4: *Một người đi từ nhà đến cơ quan phải đi qua hai ngã tư. Xác suất gặp đèn đỏ ở ngã tư thứ nhất, thứ hai lần lượt là 0,1 và 0,2. Khi gặp đèn đỏ, trung bình người đó phải chờ mất 2 phút. Hãy tìm thời gian trung bình của người đó chờ đợi ở trên đường khi đi từ nhà đến cơ quan.*

Giải:

Gọi X là thời gian người ấy chờ đợi trên đường khi đi từ nhà tới cơ quan. Khi đó X là biến ngẫu nhiên có thể nhận được các giá trị: 0; 2; 4.

Gọi A_i là biến cố gặp đèn đỏ ở ngã tư thứ i. $(i = 1,2)$

Suy ra $\overline{A_i}$ là biến cố không gặp đèn đỏ ở ngã tư thứ i.

Các xác suất tương ứng là:

$$P[X = 0] = P\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}) = 0{,}9 \,.\, 0{,}8 = 0{,}72.$$

$$P[X = 2] = P\left(\overline{A_1} \cap A_2\right) + P(A_1 \cap \overline{A_2}) = 0{,}9 \,.\, 0{,}2 + 0{,}1 \,.\, 0{,}8 = 0{,}26.$$

$$P[X = 0] = P\left(A_1 \cap A_2\right) = P(A_1).P(\overline{A_2}) = 0{,}1 \,.\, 0{,}2 = 0{,}02.$$

Vậy thời gian trung bình mà người đó chờ đợi trên đường đi từ nhà đến cơ quan là:

$$E(X) = 0 \,.\, 0{,}72 + 2 \,.\, 0{,}26 + 4 \,.\, 0{,}02 = \frac{6}{10}(\textit{phút}) = 36(\textit{giây}).$$

C. BÀI TẬP:

Bài 1: Tung 3 đồng xu cân đối và đồng chất như nhau. Gọi X là số mặt sấp xuất hiện khi tung.

a) Xác định luật phân phối xác suất của X.

b) Tính $E(X)$ và $D(X)$.

Bài 2: Ba quả cầu được đánh dấu 1; 2; 3 và phân phối ngẫu nhiên vào 3 hộp cũng được đánh dấu số 1; 2; 3. Gọi X là số quả cầu mà số ghi trên đó trùng với số ghi trên hộp.

a) Tìm bảng phân phối xác suất của X.

b) Tính $E(X)$ và $D(X)$.

Bài 3: Xác suất bắn trúng đích khi bắn một phát đạn của một xạ thủ là 0,4. Xạ thủ ấy có 3 viên đạn và bắn lần lượt vào bia cho đến khi có viên đạn trúng hoặc hết đạn thì dừng lại. Gọi X là số viên đạn đã bắn.

a) Tìm bảng phân phối của X.

b) Tính $E(X)$ và $D(X)$.

Bài 4: Một hộp có đựng 6 sản phẩm trong đó có 2 phế phẩm.

1) Lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm. Gọi X là số chính phẩm trong 3 sản phẩm lấy ra. Tìm luật phân phối của X.

2) Lấy lần lượt từng sản phẩm cho tới khi lấy được chính phẩm rồi thì thôi. Gọi Y là số sản phẩm lấy ra.

a) Tìm bảng phân phối của Y.

b) Tính $E(Y)$ và $D(Y)$.

3) Lấy lần lượt từng sản phẩm cho tới khi lấy được 2 chính phẩm thì thôi. Gọi Z là số sản phẩm lấy ra. Tìm bảng phân phối của Z.

Bài 5: Cho X_1, X_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có bảng phân phối.

X_1	0	1	2
P	0,3	0,6	0,1

X_2	0	1
P	0,3	0,6

a) Tìm bảng phân phối của $X_1 + X_2$.
b) Tính $E(X_1 + X_2)$.

Bài 6: Hai xạ thủ A và B, mỗi người có hai viên đạn lần lượt thay phiên nhau bắn vào bia cho tới khi nào có 1 viên đạn trúng hoặc hết đạn thì dừng lại.

Gọi X là số viên đạn tiêu hao (đã bắn) của xạ thủ A.
Y là số viên đạn tiêu hao (đã bắn) của xạ thủ B.

Biết rằng xạ thủ A bắn trước, xác suất trúng đích của A, B là 0,6; 0,7.
a) Lập bảng phân phối xác suất của X, Y.
b. Tính $E(X)$; $E(Y)$.

Bài 7: Một cái hộp kín gồm có 5 viên bi vàng và 3 viên bi xanh giống nhau về hình dạng và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 3 bi.

Goi X là số viên bi xanh được lấy ra.
Y là số viên bi vàng được lấy ra.

a) Lập bảng phân phối xác suất của X, Y.
b) Tìm $E(X)$, $D(X)$; $E(Y)$, $D(Y)$.

Bài 8: Cho hai lô hàng đựng sản phẩm, mỗi lô có đựng 7 sản phẩm. Số sản phẩm tốt trong lô thứ nhất, thứ hai lần lượt là 5 sản phẩm và 6 sản phẩm.

1) Chọn ngẫu nhiên từ lô hàng thứ nhất ra 2 sản phẩm. Gọi X là số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất của X.

2) Chọn ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng ra 1 sản phẩm. Gọi Y là số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất của X.

3) Chọn ngẫu nhiên một lô hàng, rồi từ lô hàng đó chọn ngẫu nhiên ra hai sản phẩm. Gọi Z là số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm lấy ra. Lập bảng phân phối xác suất của Z. Tính $E(Z)$.

Bài 9: Có hai hộp giống nhau, hộp I có 8 bi vàng và 2 bi xanh; hộp II có 6 bi vàng và 2 bi xanh.

Lấy từ hộp I hai bi bỏ sang hộp II, sau đó từ hộp II lấy ra 2 bi.

1) Gọi X là số bi vàng lấy từ hộp I bỏ sang hộp II. Tìm bảng phân phối xác suất của X.

2) Gọi Y là số bi vàng lấy ra từ hộp II.
   a) Lập bảng phân phối xác suất của X.
   b) Tính $E(Y)$, $D(Y)$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN:

Bài 1: Có 7 học sinh trong đó có 4 em nam và 3 em nữ.

1) Sắp xếp các em học sinh thành một hàng ngang.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp như vậy ?

b) Tìm xác suất để xếp được các học sinh nam, nữ đứng xen kẽ nhau.

c) Tìm xác suất để xếp được các học sinh nam đứng về một phía và các học sinh nữ đứng về một phía.

2) Sắp xếp các học sinh xung quanh một cái bàn tròn.

a) Có bao nhiêu cách sắp xếp như vậy.

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp để không có học sinh nữ nào được đứng cạnh nhau.

Bài 2: Trên các tấm thẻ, mỗi thẻ được ghi một chữ số sau: 0;1; 2; 3; 4; 5. Sắp xếp ngẫu nhiên 6 tấm thẻ đó thành một hàng ngang.Tìm xác suất để số xếp được là:

1) Số có 6 chữ số. 2) Số có 6 chữ số lẻ.

3) Số có 6 chữ số chia hết cho 3. 4) Số có 6 chữ số chia hết cho 5.

5) Số có 6 chữ số trong đó chữ số 1, 5 luôn đứng cạnh nhau.

Bài 3: Cho tập hợp X= {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}. Lấy ngẫu nhiên từ tập hợp X 5 chữ số khác nhau để lập thành một số có 5 chữ số.

1) Hỏi có bao nhiêu chữ số như vậy?

2) Tìm xác suất của các biến cố số tìm được là:

a) Số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau và có chữ số 2 đứng đầu.

b) Số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau sao cho trong 5 chữ số đó có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ.

Bài 4: Một lớp có 10 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Cần chọn 5 người trong lớp để tham gia hoạt động tình nguyện trong hè.

1) Có bao nhiêu cách chọn như vậy?

2) Tìm xác suất của các biến cố sau:

a) Chọn được toàn học sinh nam.

b) Chọn được ít nhất 2 học sinh nam và 2 học sinh nữ.

c) Chọn được ít nhất 1 học sinh nam và 1 học sinh nữ.

Bài 5: Một hộp có 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ngẫu nhiên từ hộp ra 4 viên bi.Tìm xác suất của các biến cố sau:

1) Chỉ chọn được các viên bi cùng 1 màu.

2) Chọn được các viên bi không có đủ 3 màu.

Bài 6: Cho nhị thức $(1+x)^{100}$

1) Tìm số hạng thứ 9 ? Số hạng chính giữa của khai triển đó.

2) Dựa vào khai triển đó chứng minh các đẳng thức sau:

a) $C_{100}^{0}+C_{100}^{2}+...+C_{100}^{100}=C_{100}^{1}+C_{100}^{3}+...+C_{100}^{99}$

b)

$$4^{100}C_{100}^{0}-4^{99}C_{100}^{1}+4^{98}C_{100}^{2}-...+C_{100}^{100}=C_{100}^{0}+2C_{100}^{1}+2^{2}C_{100}^{2}+...+2^{100}C_{100}^{100}$$

3) Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=C_{100}^{0}+C_{100}^{1}+...+C_{100}^{100}$.

Từ đó suy ra: $B=C_{100}^{1}+C_{100}^{3}+...+C_{100}^{99}$

b) $C=2.C_{100}^{0}+2^{2}.C_{100}^{1}+...+2^{101}.C_{100}^{100}$.

Bài 7: Cho khai triển $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{-\frac{28}{15}}\right)^{n}$

Biết rằng: $C_{n}^{n}+C_{n}^{n-1}+C_{n}^{n-2}=79$

1) Tìm số hạng thứ 7 của khai triển trên.
2) Tìm số hạng chứa x^{16} của khai triển.
3) Tìm số hạng không chứa x của khai triển.
4) Tìm số hạng không chứa x với số mũ nguyên.
5) Tìm số hạng không chứa x với số mũ tự nhiên.

Bài 8: Tung 3 đồng xu cân đối và đồng chất như nhau.

1) Tìm không gian mẫu của phép thử đó.
2) Tìm xác suất của các biến cố sau:
   a) Xuất hiện đúng một đồng xu sấp.
   b) Xuất hiện ít nhất 1 đồng xu sấp.
3) Gọi X là số mặt sấp khi tung 3 đồng xu đó.
   a) Xác định bảng phân phối xác suất của X.
   b) Tính $E(X)$, $D(X)$ và $\sigma(X)$.

Bài 9: Một hộp có đựng 3 quả cầu đỏ và 2 quả cầu xanh. Hai người A và B thay phiên nhau lấy cầu trong hộp, mỗi lần lấy một quả cầu không hoàn lại cho tới khi lấy được cầu xanh thì dừng lại. (A lấy trước).

1) Tìm xác suất của biến cố việc lấy cầu dừng lại ở quả cầu thứ 3.
2) Gọi X, Y lần lượt là số cầu mà A, B lấy được.
   a) Lập bảng phân phối xác suất của X, Y, $X+Y$.
   b) Tính $E(X)$, $D(X)$, $E(Y)$ và $D(Y)$.

Bài 10: Hai thùng hàng đựng sản phẩm, thùng I đựng 10 sản phẩm trong đó có 8 sản phẩm tốt, thùng II đựng 8 sản phẩm trong đó có 6 sản phẩm tốt.

1) Lấy ngẫu nhiên từ 1 thùng ra 1 sản phẩm.

a) Tìm xác suất để lấy được 2 sản phẩm đều tốt.

b) Gọi X là số sản phẩm tốt trong 2 sản phẩm lấy ra. Tìm luật phân phối xác suất của X.

2) Lấy ngẫu nhiên từ thùng I ra 2 sản phẩm bỏ vào thùng II, sau đó từ thùng II lấy ra 1 sản phẩm.

Gọi Y, Z là số sản phẩm tốt lấy ra từ thùng I, thùng II.

a) Tìm phân phối xác suất của Y, Z.

b) Tính các số đặc trưng của Y, Z.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

Bài 1: Có bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4.

A. 24 B. 30 C. 36 D. 60

Bài 2: Trong các số tự nhiên có 3 chữ số có bao nhiêu số mà các chữ số của nó tăng dần hoặc giảm dần.

A. 204 B. 120 C. 168 D. 240

Bài 3: Từ các số {0; 1; 2; 4; 5} có thể viết được bao nhiêu số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 3.

A. 24 B. 120 C. 96 D. 240

Bài 4: Xếp ngẫu nhiên 7 học sinh trong đó có 4 nam và 3 nữ thành một hàng ngang. Số cách sắp xếp để học sinh nam và nữ đứng xen kẽ vào nhau là.

A. 144 B. 5040 C. 288 D. 840.

Bài 5: Số đường chéo của đa giác n cạnh là:

A. A_n^2 B. C_n^2 C. $C_n^2 - n$ D. $A_n^2 - n$

Bài 6: Chọn ngẫu nhiên 2 số trong tập hợp {1, 2, ... 9}. Xác suất để tích 2 số đó là số chẵn bằng:

A. $\frac{32}{32}$ B. $\frac{20}{30}$ C. $\frac{10}{36}$ D. $\frac{26}{36}$

Bài 7: Hai người độc lập cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia. Xác suất trúng đích của họ lần lượt là 0,3; 0,5. Xác suất để có ít nhất một người bắn trúng là:

A. 0,5 B. 0,35 C. 0,15 D. 0,65

Bài 8: Sắp ngẫu nhiên 6 tấm thẻ trên đó ghi các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 thành một hàng ngang. Xác suất để xếp được số mà 1 và 6 không đứng cạnh nhau là bao nhiêu:

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{5}{6}$

Bài 9: Một đội văn nghệ có 10 người: 6 nữ và 4 nam. Chia đội ra 2 nhóm có số người bằng nhau. Xác suất để trong mỗi đội số nam và số nữ như nhau là:

A. $\frac{132}{252}$ B. $\frac{120}{252}$ C. $\frac{126}{252}$ D. $\frac{121}{252}$

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ:

§1. HAI QUI TẮC ĐẾM CƠ BẢN

Bài 1:

a) Số cách chọn được 1 học sinh từ nhóm đó:

$8 + 7 + 5 = 20$ (cách).

b) Số cách chọn để được 2 học sinh có học lực khác nhau.

+ Trường hợp 1: Chọn được một học sinh trung bình và một học sinh khá có: $8 \times 7 = 56$ (cách).

+ Trường hợp 2: Chọn được một học sinh trung bình và một học sinh giỏi có: $8 \times 5 = 40$ (cách).

+ Trường hợp 3: Chọn được một học sinh khá và một học sinh giỏi có:

$7 \times 5 = 35$ (cách).

Vậy, số cách chọn được 2 học sinh có học lực khác nhau:

$56 + 40 + 35 = 131$ (cách).

c) Số cách chọn để có được 3 học sinh có học lực khác nhau:

$8 \times 7 \times 5 = 280$ (cách).

Bài 2:

a) Ta có:

Số cách chọn cổng vào công ty: 5 cách.

Tương ứng với một cách chọn cổng vào, số cách chọn cổng ra: 5 cách.

Vậy số cách chọn cổng vào ra: $5 \times 5 = 25$ (cách).

b) Số cách chọn cổng vào: 5 cách.

Số cách chọn cổng ra: 4 cách (vì cổng ra phải khác cổng vào).

Vậy số cách chọn cổng vào, ra là: $5 \times 4 = 20$ (cách).

Bài 3: Gọi các số điện thoại của huyện A có dạng $\overline{85abcd}$.

Số cách chọn a là 10 cách.

Số cách chọn b là 10 cách.

Số cách chọn c là 10 cách.

Số cách chọn d là 10 cách.

Vậy số máy điện thoại tối đa của huyện A có thể mắc là:

$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ (máy).

Bài 4: Gọi số có 4 chữ số cần tìm là $\overline{abcd}$

a) Số cách chọn d là 4 cách.

Số cách chọn a là 6 cách.

Số cách chọn b là 7 cách.

Số cách chọn c là 7 cách.

Số các số chẵn có 4 chữ số cần tìm là: $4 \times 6 \times 7 \times 7 = 1176$ (số).

b) Vì $\overline{abcd}$ là số chẵn nên d có thể chọn các chữ số là 0; 2; 4; 6. Hơn nữa $\overline{abcd}$ có các chữ số khác nhau nên:

+ Trường hợp 1: $d \neq 0$

Số cách chọn d là 3 cách.
Số cách chọn a là 5 cách.
Số cách chọn b là 5 cách.
Số cách chọn c là 4 cách.

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau mà tận cùng khác 0 là:

$3 \times 5 \times 5 \times 4 = 300$ (số).

+ Trường hợp 2: $d = 0$

Số cách chọn a là 6 cách.
Số cách chọn b là 5 cách.
Số cách chọn c là 4 cách.

Vậy số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau mà tận cùng là 0 là:

$1 \times 6 \times 5 \times 4 = 120$ (số).

Từ đó suy ra số các số chẵn có 4 chữ số khác nhau cần tìm là:

$300 + 120 = 420$ (số)

c) * Số có 4 chữ số khác nhau:

Số cách chọn a là 6 cách.
Số cách chọn b là 6 cách.
Số cách chọn c là 5 cách.
Số cách chọn d là 4 cách.

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau là:

$6 \times 6 \times 5 \times 4 = 720$ (số).

* Số có 4 chữ số khác nhau có tận cùng là 5 có dạng $\overline{abc5}$

Số cách chọn a là 5 cách.
Số cách chọn b là 5 cách.
Số cách chọn c là 4 cách.

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau có tận cùng là 5 là:

$5 \times 5 \times 4 = 100$ (số).

Từ đó suy ra số các số có 4 chữ số khác nhau không có tận cùng là 5 cần tìm là:

$720 - 100 = 620$ (số).

d) Vì $\overline{abcd}$ là số lẻ nên d có thể chọn các số 1; 3; 5.

Mặt khác $\overline{abcd} < 4000$ nên a có thể chọn các số 1; 2; 3.

+ Trường hợp 1: Nếu $a = 1$, số cần tìm có dạng $\overline{1bcd}$

Số cách chọn d là 2 cách.
Số cách chọn b là 5 cách.
Số cách chọn c là 4 cách.

Vậy số các số lẻ có 4 chữ số khác nhau dạng $\overline{1bcd}$:

$2 \times 5 \times 4 = 40$ (số).

+ Trường hợp 2: Nếu $a = 2$, số cần tìm có dạng $\overline{2bcd}$

Số cách chọn d là 3 cách.
Số cách chọn b là 5 cách.
Số cách chọn c là 4 cách.

Vậy số các số lẻ có 4 chữ số khác nhau dạng $\overline{2bcd}$ là:

$3 \times 5 \times 4 = 60$ (số).

+ Trường hợp 3: Nếu $a = 3$ (tương tự a = 1) có 40 (số)

Vậy số các số lẻ có 4 chữ số khác nhau nhỏ hơn 4000 là:

$40 \times 2 + 60 = 140$ (số).

e) Vì số $\overline{abcd}$ nhất thiết phải có mặt chữ số 5 nên số cách chọn vị trí chữ số 5 có 4 cách.

+ Trường hợp $a = 5$, số cần tìm có dạng $\overline{5bcd}$

Số cách chọn b là 6 cách.
Số cách chọn c là 5 cách.
Số cách chọn d là 4 cách.

Vậy số các số có dạng $\overline{5bcd}$ là:

$6 \times 5 \times 4 = 120$ (số).

+ Trường hợp $b = 5$, số cần tìm có dạng $\overline{a5cd}$

Số cách chọn a là 5 cách.
Số cách chọn c là 5 cách.
Số cách chọn d là 4 cách.

Vậy số các số có dạng $\overline{a5cd}$ là:

$5 \times 5 \times 4 = 100$ (số).

+ Trường hợp $c = 5$ hoặc $d = 5$ tương tự trường hợp $b = 5$.

Do đó số các số có 4 chữ số khác nhau nhất thiết có mặt chữ số 5 là:

$120 + 100 \times 3 = 420$ (số).

f) Gọi số có 9 chữ số cần tìm là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9} = a$

* Vì trong a chữ số 5 có mặt 3 lần, mỗi số có mặt một lần nên ta chỉ thêm hai chữ số 5 vào tập các chữ số đã cho là:

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 5; 5.

Số cách chọn a_1 là 8 cách.
Số cách chọn a_2 là 8 cách.
Số cách chọn a_3 là 7 cách.
Số cách chọn a_4 là 6 cách.
Số cách chọn a_5 là 5 cách.
Số cách chọn a_6 là 4 cách.
Số cách chọn a_7 là 3 cách.

Số cách chọn a_8 là 2 cách.

Số cách chọn a_9 là 1 cách.

Vậy số các số được lập từ các chữ số trên:

$$8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 322560 \text{ (số)}.$$

* Mặt khác vì chữ số 5 được lập lại 3 lần trong mỗi số. Suy ra số các số cần tìm là: $\frac{322560}{1 \times 2 \times 3} = 53760$

Bài 5:

a)

* Số có 5 chữ số khác nhau:

Áp dụng qui tắc nhân ta có kết quả các số cần tìm là:

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

* Các số có 5 chữ số khác nhau bắt đầu bằng các chữ 123 có dạng $\overline{123ab}$

Số cách chọn a là 6 cách.

Số cách chọn b là 5 cách.

Vậy số các số có 5 chữ số khác nhau được bắt đầu bởi số 123 là:

$$6 \times 5 = 30 \text{ (số)}$$

* Vậy số các số có 5 chữ số khác nhau không được bắt đầu bởi từ số 1 2 3 là: $15120 - 30 = 15090$

b)

* Số cách chọn vị trí của chữ số 1 và 5 đứng cạnh nhau là: $4 \times 2 = 8$.

* Số cách chọn các chữ số còn lại: $7 \times 6 \times 5 = 210$.

Vậy số các số có 5 chữ số khác nhau, trong đó chữ số 1 và 5 luôn đứng cạnh nhau là: $8 \times 210 = 1680$.

c) Gọi số có 4 chữ số khác nhau là $\overline{abcd}$

Vì $\overline{abcd} \le 4567$ nên a có thể nhận các giá trị 1, 2, 3, 4.

* Nếu $a \neq 4$:

Số cách chọn a là 3 cách.

Số cách chọn b là 8 cách.

Số cách chọn c là 7 cách..

Số cách chọn d là 6 cách.

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau không lớn hơn 4567 và có chữ số hàng ngàn khác 4 là: $3 \times 8 \times 7 \times 6 = 1008$

* Nếu $a = 4$:

Khi đó b có thể chọn các chữ số 1; 2; 3; 5

+ Nếu $b \neq 5$ thì:

Số cách chọn c là 7 cách.

Số cách chọn d là 6 cách.

+ Nếu $b = 5$ thì c có thể chọn các chữ số 1; 2; 3; 6.

Nếu $c \neq 6$ thì d có 6 cách.

Nếu $c = 6$ thì d có 4 cách. ($d \in \{1, 2, 3, 7\}$)

Vậy số các số có 4 chữ số khác nhau lớn hơn 4567 và có dạng là $\overline{4bcd}$ là

$$3.7.6 + 3.6 + 1.4 = 148$$

Vậy số các số cần tìm: $1008 + 148 = 1156$

Bài 6.

a) Số các số có 5 chữ số: $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 27216$

b) Số có 5 chữ số có tận cùng là chữ số 6 có dạng $\overline{abcd6}$.

Để $\overline{abcd6} \vdots 3$ thì $\overline{abcd} \vdots 3$.

Ta có: $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ (số) có dạng $\overline{abcd}$.

Vì cứ 3 số có 1 số chia hết cho 3 nên ta có:

$9000 : 3 = 3000$ (số) chia hết cho 3.

Vậy có 3000 số có dạng $\overline{abcd} \vdots 3$.

§2: HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP.

Bài 1:

a) Đáp số: $P_7 = 7! = 5040$.

b) Đáp số: $P_4 . P_3 = 4!. 3! = 144$.

Hướng dẫn:

- Cho vị trí cho 4 học sinh nam: $P_4 = 4!$
- Tương ứng với mỗi cách chọn đó, số cách chọn vị trí 3 học sinh nữ

$$P_3 = 3!$$

c) Đáp số $P_4 . P_3 . P_2 = 4! . 3! . 2! = 288$.

Hướng dẫn:

- Chọn vị trí cho 4 học sinh nam $P_4 = 4!$
- Chọn vị trí cho 3 học sinh nữ $P_3 = 3!$
- Đổi vị trí của 2 nhóm học sinh, số cách đổi $P_2 = 2!$

Bài 2:

a) Đáp số: $4 . P_2 . P_3 = 4 . 2! . 3! = 48$.

Hướng dẫn:

- Chọn vị trí của Ngọc và Lan ngồi gần nhau $4. P_2 = 4 . 2!$
- Chọn vị trí của 3 học sinh còn lại $P_3 = 3!$

b) Đáp số: $P_5 - 4 . P_2 . P_3 = 5! - 4 . 2! . 3! = 72$.

Hướng dẫn:

- Số cách xếp 5 học sinh vào ghế 5 chỗ ngồi $P_5 = 5!$
- Số cách xếp để Ngọc và Lan ngồi cạnh nhau:

$$4 . P_2 . P_3 = 4 . 2! . 3!$$

Suy ra số cách xếp Ngọc và Lan không ngồi cạnh nhau.

c) Đáp số: $P_2 . P_3 = 2! . 3! = 12$

Hướng dẫn:

- Chọn vị trí cho Ngọc và Lan ngồi ở 2 đầu ghế $P_2 = 2!$
- Chọn vị trí cho 3 học sinh còn lại $P_3 = 3!$

Bài 3: Đáp số: $C_{15}^2.C_{13}^3.C_{10}^{10}$

Hướng dẫn:

- Chọn 2 phần thưởng trong 15 phần thưởng cho học sinh thứ nhất C_{15}^2.
- Chọn 3 phần thưởng trong 13 phần thưởng còn lại cho học sinh thứ hai C_{13}^3.
- Chọn 10 phần thưởng trong 10 phần thưởng còn lại cho học sinh thứ ba C_{10}^{10}.

Chú ý: Có thể tính bằng $C_{15}^3.C_{12}^2.C_{10}^{10}$ hoặc bằng $C_{15}^{10}.C_5^3.C_2^2$...

Bài 4:

a) Đáp số: 5^5

Hướng dẫn: áp dụng quy tắc nhân, chọn lần lượt từng chữ số:

b) Đáp số: $P_3 = 3! = 6$.

c) Đáp số: $2P_3 = 2 . 3! = 12$.

d) Đáp số: $P_5 - P_2 = 5! - 2! = 118$.

Hướng dẫn:

- Số các số có 5 chữ số khác nhau được viết từ các chữ số trên P_5.
- Số các số có 5 chữ số khác nhau bắt đầu từ số 123 là P_2.
- Suy ra số các số có 5 chữ số không bắt đầu 123

e) Đáp số: $P_5 - 1.P_4 = 5! - 4! = 96$.

Hướng dẫn:

- Số các số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là $1.P_4$.
- Suy ra số có 5 chữ số khác nhau không chia hết cho 5 là $P_5 - P_4$

Nhận xét: Ta có thể tính trực tiếp số các số có 5 chữ số chia hết cho 5 là: $4. P_4 = 4 . 4! = 96$.

f) Đáp số: $\dfrac{8!}{3!\,2!} = 3360$.

Hướng dẫn:

- Số cách viết 8 chữ số 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5 thành một số có 8 chữ số là P_8.
- Vì chữ số một được lặp lại 3 lần, chữ số 2 lặp lại hai lần nên suy ra kết quả.

g) Gọi số cần tìm là $\overline{abc}$

Vì $\overline{abc} \leq 345$ nên a có thể chọn $\in \{1, 2, 3\}$

+ Nếu $a = 1$ hoặc $a = 2$, thì số cách chọn b, c là $A_4^2 = 12$.

+ Nếu $a = 3$ thì số cách chọn b là 3 cách $b \in \{1, 2, 4\}$; tương ứng số cách chọn c là C_3^1.

Vậy số các số cần tìm là: $2 . 12 + 1 . 3 . 3 = 33$.

Bài 5:

a) Đáp số: $6 . 7^4$.

b) Đáp số: $6.A_6^4 - 5.3.A_5^3 = 2160 - 900 = 1260$.

Hướng dẫn:

- Số các số có 5 chữ số khác nhau $6.A_6^4$
- Số các số có 5 chữ số khác nhau và là số lẻ $3 .5. A_5^3$

Suy ra số các số chẵn.

Tuy nhiên, ở đây ta cũng có thể tính trực tiếp số các số chẵn.

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde}$.

- Nếu $e \neq 0$; e có 3 cách chọn; số cách chọn a: 5 cách, số cách chọn các chữ số còn lại là A_5^3.

- Nếu $e = 0$; số cách chọn a là 6 cách, số cách chọn các chữ số còn lại là A_5^3.

Vậy số các số chẵn là: $3.5.A_5^3 + 1.6.A_5^3 = 1260$ (số).

c) Đáp số: $3.A_6^3 = 360$.

Hướng dẫn: Vì số cần tìm có 4 chữ số khác nhau nhỏ hơn 4000 nên chữ số hàng nghìn có 3 cách chọn. Số cách chọn các chữ số còn lại là $A_6^3 = 120$.

d) Đáp số $4.A_5^2 + 3.A_5^2 = 140$

Hướng dẫn: Gọi số cần tìm $\overline{abcd}$

Vì $\overline{abcd} > 5000$ nên $a = 5$ hoặc $a = 6$.

+ Nếu $a = 5$, số cách chọn d là 4 cách, số cách chọn các chữ số còn lại là A_5^2.

+ Nếu $a = 6$, số cách chọn d là 3 cách, số cách chọn các chữ số còn lại là A_5^2.

Vậy số các số cần tìm $4.A_5^2 + 3.A_5^2 = 140$

e) Đáp số: $5.A_5^2$.

f) Đáp số: $A_5^2 + 2.4.4 = 52$

Hướng dẫn: Gọi chữ số cần tìm $\overline{abc2}$

+ Nếu $a = 4$: thì số cách chọn b, c là A_5^2

+ Nếu $b = 4$: thì số cách chọn a là 4, số cách chọn c là 4.

+ Nếu $c = 4$: thì số cách chọn a là 4, số cách chọn b là 4.

Suy ra kết quả.

g) Đáp số: $\frac{9!}{3!} - \frac{8!}{3!}$

Hướng dẫn:

- Nếu kể cả trường hợp số 0 đứng đầu, từ các chữ số 0, 1, 1, 1, 2; 3; 4, 5, 6 có $\frac{9!}{3!}$ số.

- Trong đó nếu chữ số không đứng đầu thì có $\frac{8!}{3!}$ số.

Suy ra kết quả.

Bài 6:

a) Đáp số: $4.A_4^3 = 96$ (số) trong đó có $3.3.A_3^2 = 54$ (số)..

b) Đáp số: $1.A_4^3 = 24$ (số).

c) Đáp số: $P_4 - P_3 = 18$ (số).

Hướng dẫn: Ta có các số chia hết cho 3 khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3. Vì thế số có 4 chữ số khác nhau chia hết cho 3 được viết từ số trên chỉ có thể là 4 chữ số 0; 3; 6; 9.

-Có P_4 số có 4 chữ số khác (kể cả số 0 ở đầu), trong đó có P_3 số có 4 chữ số khác nhau mà số 0 đứng đầu .

Suy ra số các số cần tìm.

d) Đáp số: $P_4 - P_3 = 18$ (số)

e) Đáp số: 60 (số)

Hướng dẫn:

- Số các số có 5 chữ số khác nhau $4.P_4 = 96$.

- Số các số có 5 chữ số mà trong đó chữ số 1 và 3 được đứng cạnh nhau là:

$$4.2!.3! - 3.2!.2! = 36.$$

Vậy số các số có 5 chữ số khác nhau mà chữ số 1 và 3 không đứng cạnh nhau là: 96 - 36 = 60 (số).

Bài 7: Đáp số: - $A_9^4 = 3024$

- Tổng $\frac{3024}{2} \cdot 11 \cdot 110 = 16789320$

Hướng dẫn:

Trong số 3024 số cần tìm tương ứng với mỗi số thì tồn tại một số thuộc tập này sao cho các chữ số của các số đó theo đúng thứ tự bằng 10.

Ví dụ: với số 3742 thì có 7368. Có tất cả $\frac{3024}{2}$ cặp như thế.

Vậy tổng của nó là $\frac{3024}{2}\cdot 11\cdot 110 = 16789320$.

Bài 8: a) Đáp số: $P_5 = 5! = 120$ (số).

b) Đáp số: $\frac{P_9}{5!} = 3024$ (số)

Bài 9: a) Đáp số: $1.5.5 + 2.4.5 = 65$ (số).

b) Đáp số: $5.A_5^2 - (1.A_5^2 + 2.4.4) = 48$ (số)

Hướng dẫn:

- Số có 3 chữ số khác nhau $5.A_5^2$
- Số có 3 chữ số khác nhau mà nhất thiết có mặt chữ số 1 là $1.A_5^2 + 2.4.4 = 52$.

Từ đó suy ra kết quả.

c) Đáp số: $A_5^2 + 1.4.4 = 36$ (số)

d) Đáp số: $P_3 - P_2 = 4$ (số).

e) Đáp số: $\frac{8!}{3!} - \frac{7!}{3!} = 5880$ (số)

Bài 10:

a) Đáp số: $P_{10} = 10! = 3628800$.
b) Đáp số: $P_5 \,.\, P_5 = 5!\,.\,5! = 14400$.

Bài 11:

a) Đáp số: $C_8^2.C_8^2 = 784$ (cách).

b) Đáp số: $C_8^2.C_5^2 + C_8^1.C_5^1.C_3^2 = 400$ (cách).

c) Đáp số: $C_8^2.C_5^2.C_3^1 + C_8^1.C_5^2.C_3^1 + C_8^1.C_5^1.C_3^2 = 780$ (cách).

Bài 12: Đáp số: 7560 (cách).

Hướng dẫn: Vì có 3 học sinh giỏi tất cả mà yêu cầu mỗi nhóm đều có học sinh giỏi, nên mỗi tổ có 1 hoặc 2 học sinh loại này.

Vì có 5 học sinh khá mà yêu cầu mỗi nhóm có ít nhất 2 học sinh khá nên mỗi tổ có 2 hoặc 3 học sinh khá.

Do đó số cách chia là:

$$C_3^1.C_5^2.C_8^5 + C_3^1.C_5^3.C_8^4 + C_3^2.C_5^2.C_8^4 + C_3^2.C_5^3.C_8^3 = 7560 \text{ (cách)}.$$

Bài 13: Đáp số: 56875

Hướng dẫn: Mỗi đề kiểm tra phải có số câu dễ là 2 hoặc 3.

Suy ra số đề kiểm tra cần tìm là:

$$C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 + C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2 + C_{15}^3.C_{10}^1.C_{15}^1 = 56875 \text{ (đề)}$$

Bài 14: Đáp số: 207900.

Hướng dẫn: Số cách phân công các thanh niên tình nguyện về các tinh là:

$$C_3^1.C_{12}^4.C_2^1.C_8^4.C_1^1.C_4^4 = 207900,$$

Bài 15: Đáp số: a. 99 cách.
b. 24 cách.

Hướng dẫn:

a) Vì có 4 khách và 3 toa, nên trong 3 toa ít nhất có 1 toa không ít hơn 2 khách lên tàu. Giả sử không ít hơn 2 khách lên toa I, ta có các khả năng:

+ 4 khách lên toa I có 1 cách.

+ 3 khách lên toa I có C_4^3 cách xếp 3 khách lên toa I, một khách còn lại được xếp lên toa II hoặc III.

+ 2 khách lên toa I có C_4^2 cách xếp 2 khách lên toa I, hai khách còn lại lên cùng toa (2 khả năng) hoặc lên 2 toa khác nhau (có 2 khả năng) là: $2C_4^2 + 2C_4^2$.

Lập luận tương tự các toa II, III như đối với toa I ta có tất cả các trường hợp xảy ra là: $3(1 + 2C_4^3 + 2C_4^2 + 2C_4^2) = 99$ (cách).

b) Giả sử lúc đầu có 3 vị khách lên toa I, ta có C_4^3 cách sắp xếp chỗ ngồi, 1 vị khách còn lại có 2 cách chọn lên toa II hoặc III.

Nếu có 3 khách lên toa II hoặc III cũng tương tự như vậy.

Vậy có tất cả $3.C_4^3.2 = 24$ cách xếp.

Bài 16: Đáp số: $C_5^3.C_6^3.P_3 = 1200$ cách

Bài 17:

1) Điều kiện $x \in \mathrm{N}, x \geq 2$. Phương trình trở thành:

$$2.\frac{x!}{(x-2)!} + 50 = \frac{(2x)!}{(2x-2)!}$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-1) + 50 = 2x(2x-1) \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -5 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $x = 5$.

2) Điều kiện $x \in \mathrm{N}$, $x \geq 5$. Phương trình trở thành:

$$(x+3)! = 720\frac{x!}{(x-5)!}.(x-5)!$$

$\Leftrightarrow (x+3)! = 720x! \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3) = 720 = 8.9.10$

Suy ra: $x+1=8 \Leftrightarrow x=7$

3) Điều kiện $x \in N$, $x \geq 3$. Phương trình trở thành:

$$\frac{x!}{(x-3)!} + \frac{3x!}{(x-2)!} = \frac{1}{2}(x+1)!$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)x + 3(x-1)x = \frac{1}{2}(x+1)!$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)!$$

$$\Leftrightarrow (x-2)! = 2! \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=4$$

4) Điều kiện $x \in N$, $x \geq 4$. Phương trình trở thành:

$$\frac{(x-2)!}{(x-4)!} + \frac{x!}{(x-2)!2!} = 101$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 11x - 190 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -\dfrac{19}{3} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

5) Điều kiện $x \in N$, $x \geq 2$. Phương trình trở thành:

$$x!\frac{x!}{(x-2)!} + 72 = 6\left(\frac{x}{(x-2)!} + 2x!\right)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x \,.\, x! + 72 = 6(x-1)x + 12x!$$

$$\Leftrightarrow (x-1)x\ (x!-6) - 12(x!-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x!-6)(x^2-x-12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x! = 6 \\ x^2 - x - 12 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $x=3$ hoặc $x=4$.

6) Điều kiện $x \in N$, $x \geq 10$

$$\frac{x!}{(x-10)!} + \frac{x!}{(x-9)!} = \frac{9x!}{(x-8)!}$$

$$\Leftrightarrow (x-9)(x-8) + x - 8 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 15x + 55 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \text{ (loại)} \\ x = 10 \end{array}\right.$$

Vậy $x = 10$

7) Điều kiện $x \in N,\ x \geq 1$. Phương trình trở thành:

$$35.\frac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!} = 132.\frac{\left[2(x-1)\right]!}{x!(x-2)!}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 35x + 66 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = \dfrac{11}{4}\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $x = 6$

8) Điều kiện $x \in N,\ x \geq 3$. Phương trình trở thành:

$$\frac{x!}{1!(x-1)!} + \frac{6x!}{2!(x-2)!} + \frac{6x!}{3!(x-3)!} = 9x^2 - 14x$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 9x + 14\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0\ \text{(loại)} \\ x = 7 \\ x = 2\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $x = 7$

9) Điều kiện $x \in N,\ x \leq 4$. Phương trình trở thành:

$$\frac{x!(4-x)!}{4!} - \frac{x!(5-x)!}{5!} = \frac{x!(6-x)!}{6!}$$

$$\Leftrightarrow 4\ .\ 5 - 6(5-x) = (5-x)(6-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 17x + 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 15\ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $x = 2$

10) Điều kiện $x \in N,\ x \geq 4$. Phương trình trở thành:

$$24\left[\frac{(x+1)!}{(x-2)!} - \frac{x!}{(x-4)!4!}\right] = 23\frac{x!}{(x-4)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{24(x+1)!}{(x-2)!} - \frac{x!}{(x-4)!} = \frac{23x!}{(x-4)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = \frac{x!}{(x-4)!} \Leftrightarrow x + 1 = (x-3)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\ \text{(loại)} \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Vậy $x = 5$.

11) Điều kiện $x \in Z$, $x \ge -3$. Phương trình trở thành:

$$\frac{(x+8)!}{(x+3)!\,5!} = \frac{5(x+6)!}{(x+3)!}$$

$$\Leftrightarrow (x+6)!\left[(x+7)(x+8)-600\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+15x-544=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=17 \\ x=-32 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $x = 7$.

12) Điều kiện $x \in N$, $x \ge 4$. Phương trình trở thành:

$$\Leftrightarrow x^2\frac{(x-1)!}{(x-4)!\,3!} = 12.\frac{(x+1)!}{3!(x-2)!} - x.\frac{(x-1)!}{(x-4)!\,3!}$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (loại)} \\ x=6 \end{array}\right.$$

Vậy $x = 6$.

Bài 18:

1) Điều kiện $x \in N$

Bất phương trình trở thành:

$$\frac{\dfrac{(x+4)!}{x!}}{(x+2)!} < \frac{143}{4.x!} \Leftrightarrow 4x^2+28x-95<0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2}<x<\frac{5}{2}$$

Vì $x \in N$ nên $x = 0; 1; 2$.

2) Điều kiện $x \in N$, $x \ge 3$

Bất phương trình trở thành:

$$\frac{\dfrac{(x-1)!}{(x-3)!2!}}{\dfrac{(x+1)!}{(x-3)!}} < \frac{1}{14.3!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2x(x+1)} < \frac{1}{84} \Leftrightarrow x^2+x-42>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-7 \\ x>6 \end{array}\right.$$

Vì $x \ge 3$ nên bất phương trình có nghiệm $x \in N$; $x > 6$.

3) Điều kiện $x \in N$, $x \ge 2$.

Bất phương trình trở thành: $2.\dfrac{(x+1)!}{2!(x-1)!}+3.\dfrac{x!}{(x-2)!}<30$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 15 < 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < 3$$

Suy ra $x = 2$.

4) Điều kiện $x \in \mathbb{N}, x \geq 2$

Ta có $C_{x+2}^{x-1} + C_{x+2}^{x} = C_{x+3}^{x}$.

Vậy bất phương trình trở thành: $C_{x+3}^{x} \leq 2A_{x+1}^{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)!}{x!3!} \leq 2\frac{(x+1)!}{(x-1)!} \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3) \leq 12x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq x \leq 6 \quad , \; x \in \mathbb{N}.$$

Bài 19:

Ta có $x_n > 0 \Leftrightarrow \dfrac{195}{4P_n} - \dfrac{A_{n+3}^{3}}{P_{n+1}} > 0$ $\qquad x \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow \frac{195}{4n!} - \frac{\frac{(n+3)!}{n!}}{(n+1)!} > 0 \Leftrightarrow \frac{195}{4n!} - \frac{(n+2)(n+3)}{n!} > 0$$

$$\Leftrightarrow 4n^2 + 20n - 171 < 0 \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < n < \frac{9}{2}$$

Vậy các số hạng cần tìm là x_1 , x_2 , x_3 , x_4

Bài 20: $x_n < 0 \Leftrightarrow \dfrac{A_{n+4}^{4}}{P_{n+2}} - \dfrac{143}{4P_n} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{(n+4)!}{n!}}{(n+2)!} - \frac{143}{4n!} < 0 \Leftrightarrow 4n^2 + 28n - 95 < 0$$

$\Leftrightarrow -\dfrac{19}{2} < n < \dfrac{5}{2}$ $\quad$ Vì $n \in \mathbb{Z}$ nên $n = 1; 2$

Vậy các số hạng cần tìm là x_1 , x_2.

Bài 21: Đáp số $n = 8$

Hướng dẫn: Số tam giác có 3 đỉnh trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ là C_{2n}^{3}

Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2....A_{2n}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có *n* đường chéo lớn.

Mỗi hình chữ nhật có đỉnh là 4 trong 2*n* điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ có các đường chéo là 2 đường chéo lớn. Ngược lại với mỗi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của nó là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số các cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1A_2....A_{2n}$.

Vậy số hình chữ nhật là C_n^2.

Theo giả thiết ta có $C_{2n}^3 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \dfrac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20\dfrac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow n = 8$.

Bài 22: Đáp số $M = \dfrac{3}{4}$

Hướng dẫn: Điều kiện $n \geq 3,\ n \in \mathrm{N}$. Ta có

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -9 \ \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Suy ra, với $n=5$ ta có $M = \dfrac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \dfrac{3}{4}$

Bài 23:

a. Đáp số: $x = 5;\ y = 2$.

Hướng dẫn: từ hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} A_x^y = 20 \\ C_x^y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ \dfrac{x!}{y!(x-y)!} = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x!}{(x-y)!} = 20 \\ y! = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -4 \ \text{(loại)} \end{array}\right. \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

b. Đáp số $x = 5;\ y = 7$.

Hướng dẫn: Điều kiện $x, y \in \mathrm{N};\ y \geq x \geq 1$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{y!}{(x-y)!(x-1)!} + \dfrac{y!}{(y-x)!x!} = 126 \\ (x+1)! = 720 = 6! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \dfrac{6.y!}{(y-5)!5!} = 126 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (y-4)(y-3)(y-2)(y-1)y = 21.5! = 2.4.5.6.7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

Bài 24: a) Đáp số $x = 8;\ y = 3$.

Hướng dẫn: Đưa về hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{C_{x+1}^{y}}{C_{x}^{y+1}} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{C_{x+1}^{y}}{C_{x}^{y-1}} = \dfrac{6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -1 \\ \dfrac{3y(y+1)}{(2y-1)2y} = \dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases}$$

b) Đáp số $x = 7;\ y = 3$.

Bài 25:

a)

$$VT = \left(C_n^{k-4} + C_n^{k-3}\right) + 3\left(C_n^{k-3} + C_n^{k-2}\right) + 3\left(C_n^{k-2} + C_n^{k-1}\right) + \left(C_n^{k-1} + C_n^{k}\right)$$

$$= C_{n+1}^{k-3} + 3C_{n+1}^{k-2} + 3C_{n+1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$$

$$= \left(C_{n+1}^{k-3} + C_{n+1}^{k-2}\right) + 2\left(C_{n-1}^{k-2} + C_{n-1}^{k-1}\right) + \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n+1}^{k}\right)$$

$$= C_{n+2}^{k-2} + 2C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k}$$

$$= \left(C_{n+2}^{k-2} + C_{n+2}^{k-1}\right) + \left(C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k}\right)$$

$$= C_{n+3}^{k-1} + C_{n+3}^{k} = C_{n+4}^{k}$$

b) Chứng minh tương tự (a) ta có:

$$C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$$

$$C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$$

Từ đó suy ra đpcm.

§3: NHỊ THỨC NIUTƠN

Bài 1:

a) * Số hạng thứ 6 của khai triển đã cho:

$$C_{12}^5(-3x)^5 = -243.C_{12}^5.x^5.$$

$$C_{12}^5(2)^{15}\left(\frac{-x}{2}\right)^5 = -2^{10}.C_{12}^5.x^5.$$

$$C_{12}^5(x^2)^7\left(\frac{1}{x^4}\right)^5 = C_{12}^5.\frac{1}{x^6}.$$

$$C_{12}^5(\sqrt{x})^{10}\left(\frac{1}{x}\right)^5 = C_{12}^5.$$

*** Số hạng thứ 7 của các khai triển đã cho (học sinh tự làm tương tự).**

b) Đáp số: $-C_{12}^7.3^7;\ -C_{20}^7.2^6;\ C_{12}^7;\ C_{15}^7.$

c) Đáp số: $C_{12}^{12}.3^{12}.x^{12};\ \dfrac{1}{16}C_{20}^{12}.x^{12};\ C_{12}^{2}.x^{12}$; không có.

Hướng dẫn: Đối với khai triển $\left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right)^{12}$

Số hạng tổng quát thứ $k + 1$ là:

$$T_{k+1} = C_{12}^{k}.(x^2)^{12-k}.\left(\frac{1}{x^4}\right)^k = C_{12}^{k}.x^{24-6k}$$

Để T_{k+1} chứa x^{12} thì $24 - 6k = 12 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy số hạng chứa x^{12} là $T_{13} = C_{12}^{2}.x^{12}$.

Bài 2:

a) **Đáp số:** $C_{16}^{8}.\frac{1}{x^5\sqrt[3]{x}}$

b) **Đáp số:** C_{16}^{4}

c) **Đáp số:** $T_2 = C_{16}^{1}.x^4$; $T_5 = C_{16}^{4}$

d) **Đáp số:**

$$T_2 = C_{16}^{1}.x^4;\ T_5 = C_{16}^{4};\ T_8 = C_{16}^{7}\frac{1}{x^4};\ T_{11} = C_{16}^{10}\frac{1}{x^8}$$

$$T_{14} = C_{16}^{13}\frac{1}{x^{12}};\ T_{17} = C_{16}^{16}\frac{1}{x^{16}}.$$

Hướng dẫn: Số hạng tổng quát của khai triển

$$T_{k+1} = C_{16}^{k}.\left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-k}.\left(\frac{1}{x}\right)^k = C_{16}^{k}.x^{\frac{16-4k}{3}}$$

T_{k+1} không chứa $x \Leftrightarrow \frac{16-4k}{3} = 0 \Leftrightarrow k = 4$

T_{k+1} chứa x với số mũ tự nhiên $\Leftrightarrow \frac{16-4k}{3} \in N;\ k \in Z$

$\Leftrightarrow 16 - 4k \vdots 3;\ k \in Z;\ 0 \le k \le 4$

$\Leftrightarrow k = 1;\ k = 4.$

T_{k+1} chứa x với số mũ nguyên

$\Leftrightarrow \frac{16-4k}{3} \in Z;\ k \in Z;\ 0 \le k \le 16$

$\Leftrightarrow 16 - 4k \vdots 3;\ k \in Z;\ 0 \le k \le 16.$

$\Leftrightarrow k = 1;\ 4;\ 7;\ 10;\ 13;\ 16$

Bài 3: Đáp số: $T_7 = 84x^3\sqrt{x}$.

Hướng dẫn: Từ giả thiết $C_n^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 36$ suy ra $n = 9$.

Do đó số hạng thứ 7 $T_7 = C_9^6\left(x^2\sqrt{x}\right)^3.\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}\right)^6 = 84x^3\sqrt{x}$

Bài 4: Đáp số: $T_3 = C_6^2$.

Hướng dẫn: Ta có: $C_{3n}^0 + C_{3n}^1 + \ldots + C_{3n}^{3n} = 64$.

Mặt khác, từ $(1+x)^{3n} = C_{3n}^0 + C_{3n}^1x + \ldots + C_{3n}^{3n}.x^{3n}$.

Suy ra $C_{3n}^0 + C_{3n}^1 + \ldots + C_{3n}^{3n} = 2^{3n}$.

Do đó, $2^{3n} = 64 \Leftrightarrow n = 2$.

Khi đó, số hạng thứ $k+1$ của khai triển $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^6$ là: $T_{k+1} = C_6^k.x^{6-3k}$.

T_{k+1} không chứa $x \Leftrightarrow 6 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Bài 5: Đáp số $n = 12$.

Hướng dẫn: Ta có $\left(\dfrac{x}{5} + \dfrac{2}{5}\right)^n = \dfrac{1}{5^n}(x+2)^n$.

Vì $\dfrac{1}{5^n}$ không thay đổi đối với các số hạng nên ta tìm số hạng có hệ số lớn nhất của $(x+2)^n$.

Ta có $T_9 = C_n^8.x^{n-8}.2^8$ là số hạng có hệ số lớn nhất

T_9 có hệ số $2^8C_n^8$

T_8 có hệ số $2^7C_n^7$

T_{10} có hệ số $2^9C_n^9$

Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases} 2^8C_n^8 > 2^7C_n^7 \\ 2^8C_n^8 > 2^9C_n^9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 11 \\ n < \dfrac{25}{2} \end{cases}$ suy ra $n = 12$.

Bài 6: Đáp số: a. $T_4 = 8.C_8^3.x^7$

b. Không có.

Hướng dẫn:

Ta có: $C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 = 97$ suy ra $n = 8$.

Suy ra, số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_8^k(-2)^k.x^{16-3k}$

T_{k+1} chứa x^7 nếu $16 - 3k = 7 \Leftrightarrow k = 3$.

Vậy số hạng cần tìm: $T_4 = 8.C_8^3.x^7$

T_{k+1} không chứa x nếu: $16 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{16}{3}$ (loại).

Bài 7: a) Đáp số: $C_6^0.3^3$; $C_6^2.3^3.15$; $C_6^4.3.15^2$; $C_6^6.15^3$.

Hướng dẫn: $T_{k+1} = C_6^k.3^{\frac{6-k}{2}}.15^{\frac{k}{2}}$. $0 \le k \le 6$.

Để $T_{k+1} \in Q$ thì $\dfrac{6-k}{2} \in Z$; $\dfrac{k}{2} \in Z$. Suy ra $k = 0; 2; 4; 6$.

b) Đáp số: $C_{36}^6.3^6.7^2$; $C_{36}^{21}.3^3.7^7$; $C_{36}^{36}.7^{12}$.

Hướng dẫn: $T_{k+1} = C_{36}^k.3^{\frac{36-k}{5}}.7^{\frac{k}{3}}$. $0 \le k \le 36$.

Để $T_{k+1} \in Q$ thì $\dfrac{36-k}{5} \in Z$; $\dfrac{k}{3} \in Z$.

Suy ra $36 - k \,\vdots\, 5$; $k = 3t$, $0 \le t \le 12$.

Do đó $36 - 3t \,\vdots\, 5 \Rightarrow 3(12 - t) \,\vdots\, 5$.

Vì $(3, 5) = 1$ nên $2 - t \,\vdots\, 5 \Rightarrow t = 2$; $t = 7$; $t = 12$

$\Rightarrow k = 6; k = 21; k = 36$

Các số hạng cần tìm: T_7; T_{22}; T_{37}.

Bài 8: Đáp số C_{10}^5

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$$

Suy ra: $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n = 10$.

Vậy số hạng chứa x^5 là:

$T_6 = C_{10}^5.x^5$ có hệ số C_{10}^5.

Bài 9: Đáp số $T_{k+1} = C_7^4$.

Hướng dẫn: $T_{k+1} = C_7^k\left(\sqrt[3]{x}\right)^{7-k}.\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^k = C_7^k.x^{\frac{28-7k}{12}}$

Vì T_{k+1} không chứa x nên $28 - 7k = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Bài 10: Đáp số:

a) $C_5^0 + C_5^1 + \ldots + C_5^5 = (1+1)^5 = 2^5$.

b) $C_6^0 + 3C_6^1 + \ldots + 3^6 C_6^6 = (1+3)^6 = 4^6$.

c) $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \ldots + 2^n C_n^n = (1+2)^n = 3^n$.

Bài 11:

Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1.x + C_{2n}^2.x^2 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}.x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}.x^{2n}$.

Chon $x = -10$ ta được:

$$C_{2n}^0 - 10C_{2n}^1 + 10^2 C_{2n}^2 - \ldots - 10^{2n-1} C_{2n}^{2n-1} + 10^{2n} = (1-10)^{2n} = 81^n.$$

Bài 12:

Ta có: $P = 3^{17}.C_{17}^{0} - 4^{1}.3^{16}.C_{17}^{1} + 4^{2}.3^{15}.C_{17}^{2} - ... - 4^{17}.C_{17}^{17} = (3-4)^{17} = -1$.

Hướng dẫn: Dùng khai triển $(3x - 4)^{17}$ và chọn $x = 1$.

Bài 13: Ta có: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^{0} + C_{2n}^{1}.x + ... + C_{2n}^{n}.x^{n} + ... + C_{2n}^{2n}.x^{2n}$.

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^{0} - C_{2n}^{1}.x + ...(-1)^{n}C_{2n}^{n}.x^{n} \pm ... + C_{2n}^{2n}.x^{2n}.$$

Hệ số của số hạng chứa x^{2n} trong khai triển $(1 + x)^{2n}(1 - x)^{2n}$ là:

$$\left(C_{2n}^{0}\right)^{2} - \left(C_{2n}^{1}\right)^{2} + ...(-1)^{n}\left(C_{2n}^{n}\right)^{2} \pm ... + \left(C_{2n}^{2n}\right)^{2}.$$

Mặt khác:

$$(1+x)^{2n}(1-x)^{2n} = \left(1-x^{2}\right)^{2n}$$

$$= C_{2n}^{0} - C_{2n}^{1}.x^{2} + ...(-1)^{n}C_{2n}^{n}.\left(x^{2}\right)^{n} \pm ... + C_{2n}^{2n}.\left(x^{2}\right)^{2n}.$$

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^{2n} trong khai triển $\left(1-x^{2}\right)^{2n}$ là $(-1)^{n}C_{2n}^{n}$.

Vậy từ đó ta được:

$$\left(C_{2n}^{0}\right)^{2} - \left(C_{2n}^{1}\right)^{2} + ...(-1)^{n}\left(C_{2n}^{n}\right)^{2} \pm ... + \left(C_{2n}^{2n}\right)^{2} = (-1)^{n}C_{2n}^{n}.$$

Bài 14: Ta có $S = C_{n}^{0} + 2C_{n}^{1} + 3C_{n}^{2} + ... + (n+1)C_{n}^{n}$.

Mặt khác:

$$S = C_{n}^{n} + 2C_{n}^{n-1} + 3C_{n}^{n-2} + ... + (n+1)C_{n}^{0}. \quad \left(\text{vì } C_{n}^{k} = C_{n}^{n-k}\right)$$

$$= (n+1)C_{n}^{0} + nC_{n}^{1} + (n-1)C_{n}^{2} + ... + C_{n}^{n}.$$

Suy ra: $2S = (n+2)\left(C_{n}^{0} + C_{n}^{1} + C_{n}^{2} + ... + C_{n}^{n-1} + C_{n}^{n}\right)$.

Trong đó: $C_{n}^{0} + C_{n}^{1} + C_{n}^{2} + ... + C_{n}^{n} = (1+1)^{n}$.

Vậy : $S = \dfrac{(n+2).2^{n}}{2} = (n+2).2^{n-1}$.

Bài 15: Đáp số:

a) $C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + ... + C_{10}^{10} = 2^{10}$.

b) Với $n \geq N$; $n \geq 10$, ta có phương trình trở thành:

$$C_{x}^{x} + C_{x}^{x-1} + C_{x}^{x-2} + ... + C_{x}^{x-8} + C_{x}^{x-9} + C_{x}^{x-10} = 1024.$$

$$\Leftrightarrow C_{x}^{0} + C_{x}^{1} + C_{x}^{2} + ... + C_{x}^{8} + C_{x}^{9} + C_{x}^{10} = 1024.$$

Mặt khác: $C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + C_{10}^{2} + ... + C_{10}^{8} + C_{10}^{9} + C_{10}^{10} = 1024$.

Suy ra: $x = 10$.

Bài 16: Số tập con khác rỗng chứa một số chẵn các phần tử được rút ra từ tập hợp đó là: $C_{10}^{2} + C_{10}^{4} + ... + C_{10}^{10}$

Ta có: $C_{10}^{0} + C_{10}^{1} + ... + C_{10}^{10} = (1+1)^{10} = 2^{10}$.

$$C_{10}^{0} - C_{10}^{1} + ... + C_{10}^{10} = (1-1)^{10} = 0.$$

Suy ra: $2\left(C_{10}^{0} + C_{10}^{2} + ... + C_{10}^{10}\right) = 2^{10}$.

Vậy: $C_{10}^{2} + ... + C_{10}^{10} = 2^{9} - 1$.

Bài 17: Từ giả thiết ta suy ra:

$$C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + C_{2n+1}^{2} + ... + C_{2n+1}^{n} = 2^{20}$$

Áp dụng tính chất: $C_n^k = C_n^{n-k}$ ta có:

$$C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + ... + C_{2n+1}^{n} = \frac{1}{2}\left(C_{2n+1}^{0} + C_{2n+1}^{1} + ... + C_{2n+1}^{2n+1}\right) = \frac{2^{2n+1}}{2} = 2^{2n}.$$

Vậy $2^{2n} = 2^{20} \Leftrightarrow n = 10$.

Số hạng tổng quát của khai triển:

$$T_{k+1} = C_{10}^{k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k}.\left(x^7\right)^k = C_{10}^{k}.x^{11k-40}.$$

Vậy T_{k+1} chứa x^{26} thì $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$.

Do đó, hệ số cần tìm: C_{10}^{6}.

Bài 18:

Ta có: $S = \frac{1}{1!\,2007!} + \frac{1}{3!\,2005!} + \frac{1}{5!\,2003!} + ... + \frac{1}{2007!\,1!}$

Suy ra:

$$2008!S = \frac{2008!}{1!\,2007!} + \frac{2008!}{3!\,2005!} + \frac{2008!}{5!\,2003!} + ... + \frac{2008!}{2007!\,1!}$$

$$2008!S = C_{2008}^{1} + C_{2008}^{3} + ... + C_{2008}^{2007}$$

Hơn nữa, $(1+x)^{2008} = C_{2008}^{0} + C_{2008}^{1} + C_{2008}^{2} + ... + C_{2008}^{2008}$

Chọn $x = -1$, ta được:

$C_{2008}^{0} + C_{2008}^{2} + ... + C_{2008}^{2008} = C_{2008}^{1} + C_{2008}^{3} + ... + C_{2008}^{2007}$.

Chọn $x = 1$, ta được: $C_{2008}^{0} + C_{2008}^{1} + ... + C_{2008}^{2008} = 2^{2008}$

Từ đó suy ra:

$$2\left(C_{2008}^{1} + C_{2008}^{3} + ... + C_{2008}^{2007}\right) = 2^{2008}.$$

$$\Rightarrow C_{2008}^{1} + C_{2008}^{3} + ... + C_{2008}^{2007} = 2^{2007}$$

Vậy $2008!S = 2^{2007} \Rightarrow S = \frac{2^{2007}}{2008!} = \frac{2^a}{b!}$

Suy ra (a, b) = (2007, 2008).

Bài 19: Theo giả thiết ta có: $\dfrac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \dfrac{7}{15} \Leftrightarrow n = \dfrac{22k+15}{7} = 3k + 2 + \dfrac{k+1}{7}$

Vì n là số nguyên dương bé nhất nên $\dfrac{k+1}{7} \in Z$ và là số nguyên dương bé nhất.

Suy ra: $k = 6$.

§ 4: BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

Bài 1: Đáp số:

1) $\Omega = \{NN, NS, SN, SS\}$

2) a) $\dfrac{1}{4}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{3}{4}$.

Bài 2: Đáp số:

1) $\Omega = \{(1, 1); (1, 2): \dots (1, 6); (2, 1); \dots (2,6); \dots (6,1); \dots (6, 6)\}$
(Có 36 trường hợp).

2) a, $P(A) = \dfrac{1}{6}$; b, $P(B) = \dfrac{5}{18}$; c, $P(C) = \dfrac{1}{9}$.

Bài 3: Đáp số: $\dfrac{1}{P_4} = \dfrac{1}{24}$.

Bài 4: Đáp số: $\dfrac{2!\,.\,4!}{5!} = \dfrac{2}{5}$

Bài 5: Đáp số:

1) $P_1 = \dfrac{C_{14}^7 . C_6^3}{C_{20}^{10}}$.

2) a) $P_2 = \dfrac{C_{14}^1 . C_6^2}{C_{20}^3}$. b) $P_3 = \dfrac{C_{14}^1 . C_6^2 + C_{14}^2 . C_6^1 + C_{14}^3}{C_{20}^3}$.

c) $P_4 = \dfrac{C_{14}^1 . C_6^2 + C_{14}^2 . C_6^1}{C_{20}^3}$. d) $P_5 = \dfrac{C_{14}^3}{C_{20}^3} = 1 - P_3$.

Bài 6: Đáp số: $\dfrac{6!\, A_7^5}{11!}$

Hướng dẫn:

Số cách xếp 12 em học sinh vào một cái bàn tròn có $P_{11} = 11!$.

Xếp 7 em nam vào quanh bàn tròn đó có 6! cách .

Xếp 5 em nữ vào 7 khoảng trống giữa các em nam có A_7^5 cách.

Suy ra xác suất cần tìm là $\dfrac{6!\,A_7^5}{P_{11}}$.

Bài 7: Đáp số:

a) $\dfrac{C_6^2}{C_9^5} = \dfrac{5}{42}$; b) $\dfrac{C_3^1.C_6^4}{C_9^5} = \dfrac{5}{14}$; c) $\dfrac{C_6^5}{C_9^5} = \dfrac{1}{21}$.

Bài 8: Đáp số:

a) $\dfrac{P_4 - P_3}{P_4} = \dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn: Vì các số có 4 chữ số được xếp từ các thẻ có 4 chữ số đã cho luôn chia hết cho 3 nên số có 4 chữ số cần tìm cũng chính là số có 4 chữ số chia hết cho 3.

c) $\dfrac{2P_2 + P_3}{P_4} = \dfrac{5}{12}$.

Bài 9: Đáp số:

a) $\dfrac{C_3^1.C_{12}^4.C_{10}^5.C_5^5}{C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5}$.

b) $\dfrac{C_3^1.C_{12}^4.C_2^1.C_8^4.C_1^1.C_4^4}{C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5}$.

c) $\dfrac{C_{12}^5.C_7^5.C_2^2.C_3^3}{C_{15}^5.C_{10}^5.C_5^5}$.

Bài 10: Đáp số:

a) C_{15}^3.

b) $\dfrac{C_4^1.C_{15}^1.C_{20}^1 + C_4^1.C_{15}^1.C_1^1 + C_4^1.C_{20}^1.C_1^1 + C_{15}^1.C_{20}^1.C_1^1}{C_{40}^3}$.

Bài 11: Đáp số:

a) $\dfrac{4A_4^3}{A_5^4} = \dfrac{4}{5}$.

b) $\dfrac{4A_4^3 - A_3^2}{A_5^4} = \dfrac{3}{4}$.

c) $\dfrac{1\,.\,1\,.\,A_3^2+1\,.\,2\,.\,A_3^2}{A_5^4}=\dfrac{3}{20}$.

d) $\dfrac{4!-3!}{A_5^4}=\dfrac{3}{20}$.

(Xem bài 8 - Dạng toán 1 - §2).

§ 5: XÁC SUẤT ĐIỀU KIỆN - BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

Bài 1: Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trong 2 lần gieo khác nhau.

Ta có $A=\{(1,2);(1,3)...(1,6);(2,1);(2,3)...(2,6)...(6,5)\}$.

(Có 30 khả năng xảy ra)

a) Gọi B là biến cố có tổng số chấm 2 lần gieo là 8.

Ta có $B=\{(2,6);(3,5);(4,4);(5,3);(6,2)\}$

Khi đó $P(A\cap B)=\dfrac{4}{36}$; $P(A)=\dfrac{30}{36}$.

Vậy $P(B/A)=\dfrac{\frac{4}{36}}{\frac{30}{36}}=\dfrac{2}{15}$.

b) Tương tự, gọi C là biến cố hiệu số chấm trên 2 con xúc xắc là 2 ta có:

$$P(C/A)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

c) Gọi D là biến cố tích các số chấm trên 2 con xúc xắc là 12 ta có

$$P(D/A)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$$

d) Gọi E là biến cố ít nhất 1 lần gieo có số chấm là 1 ta có

$E=\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(6,1)...(2,1)\}$

Suy ra $P(A\cap E)=\dfrac{10}{36}$

Vậy $P(E/A)=\dfrac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}}=\dfrac{1}{3}$

e) Gọi F là biến cố tổng số chấm không vượt quá 5 ta có

$F=\{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(3,1);(3,2);(4,1)\}$

Ta có $P\left(F/A\right)=\dfrac{\frac{8}{36}}{\frac{30}{36}}=\dfrac{4}{15}$

Bài 2: Đáp số $P=\dfrac{\frac{12}{7.6}}{\frac{4}{7}}=\dfrac{1}{2}$

Bài 3: Đáp số a. $\dfrac{3}{7}$; b. $\dfrac{6}{7}$; c. $\dfrac{3}{4}$

Hướng dẫn:

a) Gọi A là biến cố có tích 2 số là chẵn

$\overline{A}$ là biến cố có tích 2 số là lẻ

Khi đó $P\left(\overline{A}\right)=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}=\dfrac{2}{7}$. Suy ra $P\left(A\right)=\dfrac{5}{7}$

b) Gọi B là biến cố trong 2 số có ít nhất 1 số nguyên tố.

$\overline{B}$ là biến cố trong 2 số không có số nguyên tố nào.

Khi đó $P\left(\overline{B}\right)=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}=\dfrac{1}{7}$. Suy ra $P\left(B\right)=\dfrac{6}{7}$.

c) Gọi C là biến cố trong 2 số đó có đúng 1 số nguyên tố. Ta có:

$$C=[(2,1);(2,4);(2,6);(3,1);(3,4);(3,6);(5,1);(5,4);(5,6);$$
$$(7,1);(7,4),(7,6)]$$

Suy ra $P\left(A/C\right)=\dfrac{P\left(A\cap C\right)}{P\left(C\right)}=\dfrac{\frac{9}{21}}{\frac{12}{21}}=\dfrac{3}{4}$.

Bài 4: Đáp số a) $\dfrac{3.A_5^2}{A_6^3}$; b) $\dfrac{2!4}{A_6^3}$; c) $\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn:

Gọi A là biến cố xếp được số chẵn.

B là biến cố xếp được số có tổng 2 chữ số cuối là 3.

Ta có $B=\left\{312;321;412;421;512;521;612;621\right\}$

Khi đó $P\left(A/B\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\dfrac{\frac{4}{A_6^2}}{\frac{8}{A_6^2}}=\dfrac{1}{2}$.

Bài 5: Đáp số 40%

Hướng dẫn:

Gọi A là biến cố chọn ra 1 người ở vung dân cư đó bị dịch.

B là biến cố người chọn ra ở vùng đó phải đi cấp cứu.

Theo giả thiết ta có:

Xác suất để gặp người phải đi cấp cứu do bệnh dịch là:

$$P(A \cap B) = 0{,}08 = P(A).P(B/A)$$

Trong đó $P(A/B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

Suy ra $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P\,B/A} = \frac{0{,}08}{0{,}2} = 0{,}4$.

Vậy tỷ lệ mắc bệnh của vùng dân cư đó là 40%.

Bài 6: Đáp số: 0,9.

Hướng dẫn:

Gọi A là biến cố học sinh đó thi đỗ lần đầu.

B là biến cố học sinh đó thi đỗ lần hai.

C là biến cố học sinh đó thi đỗ.

Ta có:

$$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

$$P(C) = P\left[A \cup (\overline{A} \cap B)\right] = P(A) + P(\overline{A}).P(B/\overline{A})$$

$$= 0{,}6 + 0{,}4.0{,}75 = 0{,}9$$

Nhận xét, ta có thể tính:

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}/\overline{A}) = 0{,}4.0{,}25 = 0{,}1.$$

Suy ra: $P(C) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Bài 7: Đáp số: a. $\frac{1}{13}$; b. $\frac{1}{13}$

Gọi A là biến cố lấy lần thứ i được con ***Át***, $i = 1$, 2

Ta có: $A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$.

Suy ra:

$$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1).P(A_2/A_1) + P(\overline{A_1}).P(A_2/\overline{A_1})$$

a) Nếu lấy không hoàn lại: $P(A) = \frac{4}{52}.\frac{3}{51} + \frac{48}{52}.\frac{4}{51} = \frac{1}{13}$.

b) Nếu lấy hoàn lại: $P(A) = \frac{4}{52}.\frac{4}{52} + \frac{48}{52}.\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

Bài 8: Đáp số: $\frac{7}{12}$

Gọi A_i là biến cố lấy ra bi lần thứ i là bi đỏ

Gọi $\overline{A_i}$ là biến cố lấy ra bi lần thứ i là bi xanh $(i = 1, 2)$

Ta có: $A_2 = \left(A_1 \cap A_2\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2\right)$

Suy ra: $P\left(A_2\right) = P\left(A_1\right).P\left(A_1/A_2\right) + P\left(\overline{A_1}\right).P\left(A_2/\overline{A_1}\right)$

$$= \frac{7}{12}.\frac{6}{11} + \frac{5}{12}.\frac{7}{11} = \frac{7}{12}.$$

Bài 9:

1) Gọi A_i là biến cố lần thứ i lấy được màu xanh.

$\overline{A_i}$ là biến cố lần thứ i lấy được màu vàng $(i = 1, 2)$

a) Gọi A là biến cố lấy được 2 bi cùng màu xanh.

Ta có $A = A_1 \cap A_2 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}.\frac{3}{9} = \frac{4}{27}$

b) Gọi B là biến cố lấy được 2 bi cùng màu vàng.

Ta có $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{9}.\frac{6}{9} = \frac{10}{27}$

Gọi C là biến cố lấy được 2 bi cùng màu.
Ta có $C = A \cup B$, A, B xung khắc.

Suy ra $P(C) = \frac{4}{27} + \frac{10}{27} = \frac{14}{27}$

c) Gọi D là biến cố lấy được 2 bi khác màu.

$P(D) = 1 - \frac{14}{27} = \frac{13}{27}$

2) Đáp số: a) $\frac{1}{72}$, b) $\frac{7}{54}$, c) $\frac{1}{27}$

a) Gọi M là biến cố lấy được các viên bi cùng màu xanh.

Ta có $P(M) = \frac{C_4^2}{C_9^2}.\frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{6.3}{36.36} = \frac{1}{72}$

b) Gọi N là biến cố lấy được các viên bi cùng màu.

Ta có $P(N) = \frac{C_4^2}{C_9^2}.\frac{C_3^2}{C_9^2} + \frac{C_5^2}{C_9^2}.\frac{C_6^2}{C_9^2} = \frac{168}{1296} = \frac{7}{54}$

c) Gọi Q là biến cố các viên bi lấy được có số bi vàng và bi xanh bằng nhau.

Ta có $P(Q) = \frac{C_5^2}{C_9^2}.\frac{C_3^2}{C_9^2} + \frac{C_4^2.C_6^2}{C_9^2.C_9^2} + \frac{C_5^1.C_4^1.C_6^1.C_3^1}{C_9^2.C_9^2} = \frac{10}{27}$.

3) Đáp số: $\frac{7}{18}$

Hướng dẫn:

Gọi H_i là biến cố lấy được hộp thứ i. $i = 1, 2$

H là biến cố lấy được bi màu xanh.

Ta có: $H = (H \cap H_1) \cup (H \cap H_2)$.

Suy ra:

$$P(H) = P(H_1).P(H/H_1) + P(H_2).P(H/H_2)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{4}{9} + \frac{1}{2}.\frac{3}{9} = \frac{7}{18}$$

4) Đáp số: $\frac{17}{36}$

Hướng dẫn:

Gọi K_i là biến cố lấy được hộp thứ i. $i = 1, 2$

Gọi K là biến cố lấy được 2 bi cùng màu xanh.

$$P(K) = P(K_1).P(K/K_1) + P(K_2).P(K/K_2)$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{C_4^2}{C_9^2} + \frac{1}{2}.\frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{1}{8}$$

Gọi I là biến cố lấy được 2 bi cùng màu vàng.

Tương tự: $P(I) = \frac{25}{72}$.

Gọi R là biến cố lấy được 2 bi cùng màu.

$$P(R) = P(K) + P(I) = \frac{17}{36}.$$

Bài 10: Đáp số: a) $\frac{2}{15}$; b) $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn:

Gọi A_i là biến cố sản phẩm kiểm tra lần thứ i là phế phẩm.

$\overline{A_i}$ là biến cố sản phẩm kiểm tra lần thứ i là chính phẩm.

A là biến cố sản phẩm kiểm tra dừng lại ở sai phẩm thứ i.

a) Ta có: $A = \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right)$

Suy ra:

$$P(A) = P(A_1).P\left(\overline{A_2}/A_1\right).P\left(A_3/A_1 \cap \overline{A_2}\right) + P\left(\overline{A_1}\right).P\left(A_2/\overline{A_1}\right)$$

$$+ P\left(A_3/\overline{A_1} \cap A_2\right) = \frac{2}{6}.\frac{4}{5}.\frac{1}{4} + \frac{4}{6}.\frac{2}{5}.\frac{1}{4} = \frac{2}{15}$$

b) $P\left(\overline{A_1}/A\right)=\dfrac{P\left(\overline{A_1}\cap A\right)}{P(A)}=\dfrac{P\left(\overline{A_1}\cap A_2\cap A_3\right)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{15}}=\dfrac{1}{2}$.

Bài 11: Đáp số: a) 0,44 ; b) 0,21 ; c) 0,79

Hướng dẫn:

Gọi A_i là biến cố viên đạn thứ i trúng đích.

Khi đó $\overline{A_i}$ là biến cố viên đạn thứ i không trúng đích.

a) Gọi A là biến cố có đúng một viên trúng đích.

Ta có: $A=\left(A_1\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right)\cup\left(\overline{A_1}\cap A_2\cap\overline{A_3}\right)\cup\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap A_3\right)$.

Suy ra: $P(A)=0,3.0,6.0,5+0,7.0,4.0,5+0,7.0,6.0,5=0,44$.

b) Gọi B là biến cố không có viên nào trúng.

Ta có: $P(B)=P\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right)=0,7.0,6.0,5=0,21$

c) Gọi C là biến cố có ít nhất một viên trúng.

Ta có: $P(C)=1-P(B)=1-0,21=0,79$.

§ 6: BIẾN NGẪU NHIÊN - CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA NÓ

Bài 1: Đáp số:

a)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) $E(X)=\dfrac{3}{2}$; $D(X)=\dfrac{3}{4}$

Bài 2: Đáp số:

a)

X	0	1	2
P	$\frac{2}{3!}$	$\frac{3}{3!}$	$\frac{1}{3!}$

b) $E(X)=1$; $D(X)=1$

Bài 3: Đáp số:

a)

X	1	2	3
P	0,4	0,24	0,36

b) $E(X)=1,96$; $D(X)=0,32$

Bài 4: Đáp số:

1)

X	1	2	3
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2.a)

Y	1	2	3
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

b) $E(Y)=\frac{7}{5}$; $\quad D(Y)=\frac{28}{75}$.

3)

Z	2	3	4
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

Bài 5: Đáp số:

a)

X_1+X_2	0	1	2	3
P	0,21	0,51	0,25	0,03

b) $E(X)=1{,}1$.

Hướng dẫn:

- Các giá trị nhận được: 0; 1; 2; 3.
- Các xác suất tương ứng.

$$P[X_1+X_2=0]=P[(X_1=0)\cap(X_2=0)]=0{,}3\ .\ 0{,}7=0{,}21.$$

$$P[X_1+X_2=1]=P[(X_1=0)\cap(X_2=1)]+P[(X_1=1)\cap(X_2=0)]$$
$$=0{,}3\ .\ 0{,}3+0{,}6\ .\ 0{,}7=0{,}51.$$

$$P[X_1+X_2=2]=P[(X_1=1)\cap(X_2=1)]+P[(X_1=2)\cap(X_2=0)]$$
$$=0{,}6\ .\ 0{,}3+0{,}1\ .\ 0{,}7=0{,}25.$$

$$P[X_1+X_2=3]=P[(X_2=2)\cap(X_1=1)]=0{,}1\ .\ 0{,}3=0{,}03.$$

Bài 6: Đáp số:

a)

X	1	2
P	0,88	0,12

X	0	1	2
P	0,6	0,352	0,048

Hướng dẫn:

Gọi A_i là biến cố xạ thủ A bắn trúng ở phát thứ i.

$\overline{A_i}$ là biến cố xạ thủ A không bắn trúng ở phát thứ i.

B_i là biến cố xạ thủ B bắn trúng ở phát thứ i.

$\overline{B_i}$ là biến cố xạ thủ B không bắn trúng ở phát thứ i.

* Ta có: - Các giá trị có thể nhận được của X là 1, 2.

- Các xác suất tương ứng.

$$P[X=1] = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap B_1) = 0,6 + 0,4 \,.\, 0,7 = 0,88.$$

$$P[X=2] = P(\overline{A_1} \cap \overline{B_1}) = 0,4 \,.\, 0,3 = 0,12.$$

* Ta có: - Các giá trị có thể nhận được củ aY là 0, 1, 2.

- Các xác suất tương ứng.

$$P[Y=0] = P(A_1) = 0,6.$$

$$P[Y=1] = P(\overline{A_1} \cap B_1) + P(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2)$$
$$= 0,4 \,.\, 0,7 + 0,4 \,.\, 0,3 \,.\, 0,6 = 0,352.$$

$$P[Y=2] = P(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap \overline{A_2}) = 0,4 \,.\, 0,3 \,.\, 0,4 = 0,048.$$

b) Học sinh tự tính.

Bài 7: Đáp số:

a)

X	0	1	2	3
P	$\frac{10}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

b) Học sinh tự tính.

Bài 8: Đáp số:

1)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$

2)

Y	0	1	2
P	$\frac{2}{49}$	$\frac{17}{49}$	$\frac{30}{49}$

3)

Z	0	1	2
P	$\frac{1}{42}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{25}{42}$

Hướng dẫn: Gọi A_i là biến cố chọn được lô hàng thứ i ($i = 1, 2$)

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

- Các giá trị nhận được của Z là 0, 1, 2.
- Các xác suất tương ứng.

$$P[X = 0] = P[A_1 \cap (X = 0)] + P[A_2 \cap (X = 0)]$$
$$= P(A_1) . P[X = 0/A_1] + P(A_2) . P[X = 0/A_2]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{C_2^2}{C_7^2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{42} \cdot$$

$$P[X = 1] = P(A_1) . P[X = 1/A_1] + P(A_2) . P[X = 1/A_2]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{C_5^1 . C_2^1}{C_7^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_6^1 . C_1^1}{C_7^2} = \frac{16}{42} \cdot$$

$$P[X = 2] = P(A_1) . P[X = 2/A_1] + P(A_2) . P[X = 2/A_2]$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{C_5^2}{C_7^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{C_6^2}{C_7^2} = \frac{25}{42} \cdot$$

Bài 9: Đáp số:

1)

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

2.a)

Y	0	1	2
P	$\frac{82}{2025}$	$\frac{808}{2025}$	$\frac{1135}{2025}$

Hướng dẫn: Đặt $[X = 0] = X_0$; $[X_1 = 1] = X_1$; $[X = 2] = X_2$.

Khi đó:
- Các giá trị nhận được của Y là 0, 1, 2.
- Các xác suất tương ứng:

$$P[Y = 0] = P(X_0) . P[Y = 0/X_0] + P(X_1) . P[Y = 0/X_1] + P(X_2) . P[Y = 0/X_2]$$
$$= \frac{1}{45} \cdot \frac{C_4^2}{C_{10}^2} + \frac{16}{45} \cdot \frac{C_3^2}{C_{10}^2} + \frac{28}{45} \cdot \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{82}{2025}$$

$$P[Y=1] = P(X_0).P[Y=1/X_0] + P(X_1).P[Y=1/X_1] + P(X_2).P[Y=1/X_2]$$

$$= \frac{1}{45}\cdot\frac{C_6^1.C_4^1}{C_{10}^2} + \frac{16}{45}\cdot\frac{C_7^1.C_3^1}{C_{10}^2} + \frac{28}{45}\cdot\frac{C_8^1.C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{808}{2025}$$

$$P[Y=2] = P(X_0).P[Y=2/X_0] + P(X_1).P[Y=2/X_1] + P(X_2).P[Y=2/X_2]$$

$$= \frac{1}{45}\cdot\frac{C_6^2}{C_{10}^2} + \frac{16}{45}\cdot\frac{C_7^2}{C_{10}^2} + \frac{28}{45}\cdot\frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{1135}{2025}$$

b) Học sinh tự tính.

ÔN TẬP CHƯƠNG

Bài 1:

1. a) Số cách sắp xếp $n = P_7 = 7!$.

b) Xác suất để xếp được học sinh nam nữ đứng xen kẽ vào nhau:

$$P = \frac{4!\,.\,3!}{7!}.$$

c) Xác suất để xếp được học sinh nam, nữ đứng về hai phía khác nhau (nam một bên, nữ một bên): $P = \dfrac{4!\,.\,3!\,.\,2!}{7!}$.

2. a) Số cách sắp xếp $n = P_6 = 6!$.

b) Số cách sắp xếp để không có học sinh nữ nào được đứng cạnh nhau:

$$P = \frac{3!\,A_4^3}{P_6} = \frac{3!\,.\,4}{6!}.$$

Bài 2:

a) Xác suất để xếp được số có 6 chữ số: $P = \dfrac{6! - 5!}{6!}$.

b) Xác suất để xếp được số lẻ có 6 chữ số: $P = \dfrac{2\,.\,4\,.\,4!}{6!}$.

c) Xác suất để xếp được số có 6 chữ số chia hết cho 3: $P = \dfrac{6! - 5!}{6!}$

Vì tất cả các số có 6 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên đều có tổng các chữ số chia hết cho 3 nên chia hết cho 3.

d) Xác suất để xếp được số có 6 chữ số khác nhau chia hết cho 5 là:

$$P = \frac{4\,.\,4! + 5\,.\,4!}{6!} = \frac{9\,.\,4!}{6!}$$

e) Xác suất để xếp được số có 6 chữ số khác nhau mà chữ số 1; 5 luôn đứng cạnh nhau: $\dfrac{(4! + 4 . 3 . 3!) . 2}{6!}$.

(Nếu chọn chữ số 1 và 5 đứng ở vị trí đầu có 4! cách.
Nếu chọn chữ số 1 và 5 không đứng ở vị trí đầu có: 4 . 3 . 3!
Đổi chỗ 1 và 5 cho nhau ta có (4! + 4 . 3 . 3!) . 2 (cách).

Bài 3:

1) Số có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ X là: $7.A_7^4$.

2. a) Xác suất để số tìm được là số chẵn có 5 chữ số khác nhau và có chữ số 2 đứng đầu là: $P = \dfrac{3 . A_6^3}{A_7^4}$.

b) Xác suất để số tìm được có 5 chữ số khác nhau trong đó có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ là: $P = \dfrac{5!C_4^2.C_4^3 - 4!C_4^2.C_3^2}{A_7^4}$.

Hướng dẫn: Có $5!C_4^2.C_4^3$ số có đúng 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ từ X. Trong đó, có $4!C_4^2.C_3^2$ số có 3 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ nhưng có chữ số 0 đứng đầu.
Suy ra kết quả.

Bài 4:

1) Số cách chọn: $n = C_{20}^5$

2. a) Xác suất để chọn được 5 học sinh nam $p = \dfrac{C_{10}^5}{C_{20}^5}$.

b) Xác suất để chọn được ít nhất 2 nam và 2 nữ là:

$$p = \frac{C_{10}^2.C_{10}^3 + C_{10}^3.C_{10}^2}{C_{20}^5} = \frac{2C_{10}^2.C_{10}^3}{C_{20}^5}.$$

c. Xác suất để chọn được ít nhất 1 nam và 1 nữ:

$$p = \frac{C_{20}^5 - C_{10}^5 - C_{10}^5}{C_{20}^5} = \frac{C_{20}^5 - 2C_{10}^5}{C_{20}^5}.$$

Bài 5:

1) Xác suất để chọn được 4 viên bi cùng màu.

$$p = \frac{C_4^4 + C_5^4 + C_6^4}{C_{15}^4}.$$

2) Xác suất để chọn được các viên bi không có đủ 3 màu:

$$\frac{C_{15}^{4}-\left(C_{4}^{2}.C_{5}^{1}.C_{6}^{1}+C_{4}^{1}.C_{5}^{2}.C_{6}^{1}+C_{4}^{1}.C_{5}^{1}.C_{6}^{2}\right)}{C_{15}^{4}}$$

Trong đó: $C_{4}^{2}.C_{5}^{1}.C_{6}^{1}+C_{4}^{1}.C_{5}^{2}.C_{6}^{1}+C_{4}^{1}.C_{5}^{1}.C_{6}^{2}$ là số cách chọn để được các viên bi đủ 3 màu.

ài 6:

1) Số hạng thứ 9: $T_9 = C_{100}^{8}.x^{8}$.

Số hạng chính giữa: $T_{51} = C_{100}^{50}.x^{50}$.

2.a) Áp dụng khai triển:

$$(1+x)^{100} = C_{100}^{0} + C_{100}^{1}.x + \ldots + C_{100}^{100}.x^{100}.$$

Chọn $x = -1$ suy ra kết quả.

b) Áp dụng khai triển $(1 + x)^{100}$ và chọn $x = 2$, ta được:

$$C_{100}^{0} + 2C_{100}^{1} + \ldots + 2^{100}C_{100}^{100} = 3^{n}.$$

Áp dụng khai triển $(x - 1)^{100}$ và chọn $x = 4$, ta được:

$$4^{100}C_{100}^{0} - 4^{99}C_{100}^{1} + \ldots + C_{100}^{100} = 3^{n}.$$

Suy ra kết quả phải chứng minh.

3.a) Áp dụng khai triển $(1 + x)^{100}$ và chọn $x = 1$, ta được: $A = 2^{100}$.

b) Áp dụng khai triển $(1 + x)^{100}$ và kết quả (2a) suy ra: $B = 2^{99}$.

c) Áp dụng khai triển $(1 + x)^{100}$.

$$(1+x)^{100} = C_{100}^{0} + x.C_{100}^{1} + x^{2}.C_{100}^{2} + \ldots + x^{100}.C_{100}^{100}.$$

$$\Rightarrow x(1+x)^{100} = xC_{100}^{0} + x^{2}.C_{100}^{1} + x^{3}.C_{100}^{2} + \ldots + x^{101}.C_{100}^{100}.$$

Chọn $x = 2$ suy ra: $C = 2.3^{100}$.

ài 7:

Từ $C_{n}^{n} + C_{n}^{n-1} + C_{n}^{n-2} = 79$ suy ra $n = 12$.

Số hạng tổng quát của khai triển là:

$$T_{k+1} = C_{12}^{k}\left(x\sqrt[3]{x}\right)^{12-k}.\left(x^{-\frac{28}{15}}\right)^{k} = C_{12}^{k}.x^{\frac{16k-80}{5}};\ k \in N;\ 0 \le k \le 12.$$

1) Số hạng thứ 7: $T_7 = C_{12}^{6}.x^{\frac{16}{5}} = C_{12}^{6}.x^{3}\sqrt[5]{x}$.

2) Số hạng T_{k+1} chứa $x^{16} \Leftrightarrow \dfrac{16k-80}{5} = 16 \Leftrightarrow k = 10$.

Vậy số hạng cần tìm: $T_{11} = C_{12}^{10}.x^{16}$.

3) Số hạng T_{k+1} không chứa x $\Leftrightarrow \dfrac{16k-80}{5}=0 \Leftrightarrow k=5$.

Vậy số hạng cần tìm $T_6 = C_{12}^5$.

4) Để T_{k+1} chứa x với số mũ nguyên thì: $16k-80 \,\vdots\, 5 \Rightarrow k \,\vdots\, 5$

Suy ra: $k = 0; 5; 10$.

Vậy các số hạng cần tìm là $T_1; T_6; T_{11}$

5) Để T_{k+1} chứa x với số mũ tự nhiên thì: $16k-80 \,\vdots\, 5$ và $16k-80 \geq 0$.

$\Leftrightarrow k \,\vdots\, 5$ và $k \geq 5$.

Suy ra $k = 5; 10$.

Vậy các số hạng cần tìm là: $T_6; T_{11}$.

Bài 8:

1) Ta có Ω = {NNN; NNS; NSN; SNN; NSS; SNS; SSN; SSS}

2.a) $P = \dfrac{3}{8}$

b) $P = \dfrac{7}{8}$

3.a) Phân phối xác suất của X:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) $E(X) = 0\cdot\dfrac{1}{8} + 1\cdot\dfrac{3}{8} + 2\cdot\dfrac{3}{8} + 3\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{2}$.

$$D(X) = \left(0-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8} + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8} + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8} + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

Hoặc có thể tính:

$$D(X) = 0^2\cdot\frac{1}{8} + 1^2\cdot\frac{3}{8} + 2^2\cdot\frac{3}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Bài 9: Gọi A_i là biến cố A lấy được bi lần thứ i là xanh. $i = 1, 2$.

Gọi $\overline{A_i}$ là biến cố A lấy được bi lần thứ i là đỏ.

Gọi B_i là biến cố B lấy được bi lần thứ i là xanh. $i = 1, 2$.

Gọi $\overline{B_i}$ là biến cố B lấy được bi lần thứ i là đỏ.

1) Gọi H là biến cố việc lấy bi dừng lại ở bi thứ 3.

Ta có: $H = \left(\overline{A_1} \cap \overline{B_1} \cap A_2\right)$

Suy ra:

$$P(H) = P\left(\overline{A_1}\right).P\left(\overline{B_1}/\overline{A_1}\right).P\left(A_2/\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\right)$$
$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{5}.$$

2.a.)* Các giá trị có thể nhận được của X: 1; 2.

Các xác suất tương ứng:

$$P[X=1] = P\left[A_1\cup\left(\overline{A_1}\cap B_1\right)\right] = P\left(A_1\right) + P\left(\overline{A_1}\cap B_1\right)$$
$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{7}{10} = 0,7.$$
$$P[X=2] = P\left(\overline{A_1}\cap B_1\right) = P\left(\overline{A_1}\right).P\left(\overline{B_1}/\overline{A_1}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = 0,3.$$

Suy ra

X	1	2
P	0,7	0,3

* Các giá trị nhận được của Y: 0; 1; 2.

Tương tự cách tính trên:

$$P[Y=0] = \frac{2}{5} = 0,4.$$
$$P[Y=1] = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = 0,5.$$
$$P[Y=2] = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = 0,1.$$

Suy ra:

$X+Y$	0	1	2
P	0,4	0,5	0,1

* $X+Y$ có thể nhận được các giá trị: 1; 2; 3; 4.

$$P[X+Y=1] = P\left(A_1\right) = \frac{2}{3} = 0,4.$$
$$P[X+Y=2] = P\left(\overline{A_1}\cap B_1\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = 0,3$$
$$P[X+Y=3] = P\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap A_2\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} = 0,2.$$
$$P[X+Y=4] = P\left(\overline{A_1}\cap\overline{B_1}\cap\overline{A_2}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = 0,1.$$

Vậy bảng cần tìm:

$X+Y$	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

b) Học sinh tự tính.

Bài 10:

1) Gọi A_i là biến cố sản phẩm lấy ở thùng thứ i là tốt. $i = 1, 2$.

Gọi $\overline{A_i}$ là biến cố sản phẩm lấy ở thùng thứ i là không tốt.

a) Gọi A là biến cố lấy được 2 sản phẩm tốt.

Ta có $A = (A_1 \cap A_2) \Rightarrow P(A) = \frac{8}{10} \cdot \frac{6}{8} = \frac{3}{5}$.

b) Các giá trị có thể nhận được của X là: 0; 1; 2.

Các xác suất tương ứng:

$$P[X=0] = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{20}.$$

$$P[X=1] = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{10} \cdot \frac{6}{8} = \frac{7}{20}.$$

$$P[X=2] = \frac{3}{5}.$$

Vậy bảng phân phối của X:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{12}{20}$

2.a. * Các giá trị của Y là 0, 1, 2.

Các xác suất tương ứng:

$$P[Y=0] = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}.$$

$$P[Y=1] = \frac{C_8^1 . C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45}.$$

$$P[Y=2] = \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Vậy:

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Đặt $[Y=i] = Y_i$

* Các giá trị có thể nhận được của Z là 0, 1.

$$P[Z=0]=P(Y_0).\ P[Z=0/Y_0]+P(Y_1).\ P[Z=0/Y_1]+P(Y_2).P[Z=0/Y_2]$$
$$=\frac{1}{45}\cdot\frac{4}{10}+\frac{16}{45}\cdot\frac{3}{10}+\frac{28}{45}\cdot\frac{2}{10}=\frac{108}{450}.$$

$$P[Z=1]=P(Y_0).\ P[Z=1/Y_0]+P(Y_1).\ P[Z=1/Y_1]+P(Y_2).P[Z=1/Y_2]$$
$$=\frac{1}{45}\cdot\frac{6}{10}+\frac{16}{45}\cdot\frac{7}{10}+\frac{28}{45}\cdot\frac{8}{10}=\frac{342}{450}.$$

Vậy:

Z	0	1
P	$\frac{108}{450}$	$\frac{342}{450}$

b. Học sinh tự tính.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM:

Bài số	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Đáp án đúng	B	C	C	A	C	D	D	A	B

Chương III: DÃY SỐ
CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. PHƯƠNG PHÁP QUI NẠP TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Để chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi n $\in \mathbb{N}^*$ ***bằng phương pháp qui nạp toán học, ta tiến hành hai bước:***

Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ *(giả thiết qui nạp)* và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

2. Để chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi $n \geq p$ $(p \in \mathbb{N}, p > 1)$ ***bằng phương pháp qui nạp toán học, ta tiến hành hai bước:***

Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = p$.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ *(giả thiết qui nạp)* và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Chứng minh đẳng thức.***

Thí dụ: Chứng minh rằng với mọi n $\in \mathbb{N}^*$ **ta có đẳng thức:**

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1)$$

Giải

Với n = 1 ta có công thức đúng vì: $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$.

Giả sử (1) đúng với n = k, ta có: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ (2)

Ta phải chứng (1) đúng với n = k + 1. Thật vậy:

$$(2) \Rightarrow 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = = \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]\left[2(k+1)+1\right]}{6}$$

$\Rightarrow$ (1) đúng với $n = k + 1$.

Vậy (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dạng 2: ***Chứng minh bất đẳng thức.***

Thí dụ: Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ta có: $2^n > 2n + 1$.

Giải

Với $n = 3$: $2^3 = 8 > 7 = 2.3 + 1$.

Giả sử BĐT đúng với $n = k$ $(k \geq 3)$, ta có: $2^k > 2k + 1$

Ta phải chứng BĐT đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$2^{k+1} = 2.2^k > 2(2k + 1) > 4k + 2 > 2k + 3 = 2(k + 1) + 1$$

$\Rightarrow$ BĐT đúng với $n = k + 1$.

Vậy BĐT đúng với mọi $n \geq 3$.

Dạng 3: ***Chứng minh một tính chất.***

Thí dụ: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$: $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Giải

Với $n = 1$, ta có: $1^3 + 11.1 = 12$ chia hết cho 6.

Giả sử tính chất trên đúng với $n = k$, ta có: $k^3 + 11k$ chia hết cho 6.

Ta phải chứng tính chất đúng với $n = k + 1$. Thật vậy:

$$(k + 1)^3 + 11(k + 1) = k^3 + 11k + 12k + 3k(k + 1)$$

Vì $k^3 + 11k + 12k$ chia hết cho 6 và $k(k + 1)$ là số chẵn nên $3k(k + 1)$ chia hết cho 6

$\Rightarrow k^3 + 11k + 12k + 3k(k + 1)$ chia hết cho 6 hay tính chất đúng với $n = k + 1$.

Vậy tính chất trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

C – BÀI TẬP

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức:

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

b) $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 2n + (2n + 1) = n + 1$;

c) $\dfrac{1^2}{1.3} + \dfrac{2^2}{3.5} + \dfrac{3^2}{5.7} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

d) $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

e) $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

f) $1.4 + 2.7 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

g) $\dfrac{3}{1.2.2} + \dfrac{4}{2.3.2^2} + \ldots + \dfrac{n+2}{n(n+1).2^n} = 1 - \dfrac{1}{(n+1).2^n}$.

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có:

a) $n^3 + 2n$ chia hết cho 3;

b) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ chia hết cho 9;

c) $13^n - 1$ chia hết cho 6;

d) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9;

e) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7;

f) $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^k$ chia hết cho 11.

Bài 3: Chứng minh rằng :

a) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Cho $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. Chứng minh: $\tan(n\alpha) >$

$n.\tan\alpha$.

§2. DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Định nghĩa:

** Mỗi hàm số u xác định trên $\mathbb{N}^*$ là dãy số vô hạn (dãy số)*

$$u: \quad \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n)$$

Đặt $u(n) = u_n$: số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

** Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ là dãy số hữu hạn.*

*2. **Dãy số tăng, dãy số giảm:***

* *Dãy số (u_n) tăng nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

* *Dãy số (u_n) giảm nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

* *Các dãy số tăng và dãy số giảm gọi là dãy số đơn điệu.*

*3. **Dãy số bị chặn:***

* *Dãy số (u_n) bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho: $u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

- Lấy x tùy ý thuộc X mà P(x) đúng.

- Dùng suy luận và những kiến thức đã biết để chỉ ra rằng P(x) đúng.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Xác định một số số hạng của dãy số. Xác định số hạng tổng quát của dãy số.***

Phương pháp: - Dựa vào số hạng tổng quát của dãy để tìm các số hạng.

- Dựa vào đặc điểm của các số hạng để tìm số hạng tổng quát.

Thí dụ 1: Viết 5 số hạng đầu tiên của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$; **b)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^4}$;

c) $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$ $(n > 2)$.

Giải

a) Dãy số $u_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$ có 5 số hạng đầu tiên là:

$$u_1 = \frac{2.1-1}{1+1} = \frac{1}{2};\quad u_2 = \frac{2.2-1}{2+1} = 1;\quad u_3 = \frac{2.3-1}{3+1} = \frac{5}{4};$$

$$u_4 = \frac{2.4-1}{5+1} = \frac{7}{6};\quad u_5 = \frac{2.5-1}{5+1} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

b) Dãy số $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^4}$ có 5 số hạng đầu tiên là:

$$u_1 = \frac{(-1)^1}{1^4} = -1;\quad u_2 = \frac{(-1)^2}{2^4} = \frac{1}{16};\quad u_3 = \frac{(-1)^3}{3^4} = -\frac{1}{81};$$

$$u_4 = \frac{(-1)^4}{4^4} = \frac{1}{256}; \qquad u_5 = \frac{(-1)^5}{5^4} = -\frac{1}{625}.$$

c) Dãy số $u_n = \begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$ $(n > 2)$ có 5 số hạng đầu tiên là:

$u_1 = 1$; $u_2 = 1$; $u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$;

$u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3$; $u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5$.

Thí dụ 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy số

a) (u_n): 1; 2; 4; 8; 16;....

b) (u_n): $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$

c) (u_n): $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ **$(n \geq 1)$.**

Giải

a) Ta thấy: $u_1 = 1 = 2^{1-1}$; $u_2 = 2 = 2^{2-1}$; $u_3 = 4 = 2^{3-1}$; $\ldots \Rightarrow u_n = 2^{n-1}$.

Vậy dãy (u_n) có số hạng tổng quát là: $u_n = 2^{n-1}$.

b) Ta thấy: $u_1 = -\frac{1}{2} = \frac{(-1)^1}{1+1}; u_2 = \frac{1}{3} = \frac{(-1)^2}{2+1}; u_3 = -\frac{1}{4} = \frac{(-1)^3}{3+1}; \ldots$

$$\Rightarrow u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Vậy dãy (u_n) có số hạng tổng quát là: $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

c) Ta thấy: $u_1 = 3$; $u_2 = 2u_1 = 3.2$;

$u_3 = 2u_2 = 2(3.2) = 3.2^2$; $u_4 = 2(3.2^2) = 3.2^3$; …

$\Rightarrow u_n = 3.2^{n-1}$.

Vậy dãy (u_n) có số hạng tổng quát là: $u_n = 3.2^{n-1}$.

Dạng 2: ***Xét tính đơn điệu của một dãy số***

Phương pháp:

PP1. Dùng định nghĩa bằng cách tính hiệu $H = u_{n+1} - u_n$.

- Nếu $H > 0$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy (u_n) tăng.
- Nếu $H < 0$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy (u_n) giảm.

PP2. Nếu $u_n > 0$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì tính $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

- Nếu $T > 1$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy (u_n) tăng.
- Nếu $T < 1$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy (u_n) giảm.

Thí dụ 1: Xét tính đơn điệu của các dãy số:

a) $u_n = \dfrac{n+1}{n}$; **b)** $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$;

c) $u_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$. **d)** $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

Giải

a) Xét $H = u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+1} - \dfrac{n+1}{n} = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} < 0.$

Vậy dãy (u_n) giảm.

b) Xét $H = u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+3}{n+3} - \dfrac{2n+1}{n+2}$

$$= \left(2-\frac{3}{n+3}\right)-\left(2-\frac{3}{n+2}\right) = \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+3} > 0.$$

Vậy dãy (u_n) tăng.

c) Ta có: $u_1 = -\dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{3}$; $u_3 = -\dfrac{3}{4}$;... $\Rightarrow$ **dãy không tăng, không giảm.**

d) Xét $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{n+1}{2}$.

Kể từ $n \geq 3$ thì $T > 1$.

Vậy dãy (u_n) có $u_1 = u_2 = \dfrac{1}{2}$, còn từ đó về sau là dãy tăng.

Thí dụ 2: Cho dãy số: $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_n = \sqrt{2+u_{n-1}} \, (n \geq 2) \end{cases}$

Chứng minh (u_n) là dãy tăng.

Giải

Ta chứng minh bằng qui nạp $u_n < u_{n+1}$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Khi $n = 1$: $u_1 = \sqrt{2}$; $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow u_1 < u_2$.

Giả sử $u_k < u_{k+1}$. Ta chứng minh: $u_{k+1} < u_{k+2}$.

Ta có: $u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} \Rightarrow u_{k+1}^2 - u_k = 2$; tương tự: $u_{k+2}^2 - u_{k+1} = 2$

$\Rightarrow (u_{k+2}^2 - u_{k+1}) - (u_{k+1}^2 - u_k) = 0 \Leftrightarrow u_{k+2}^2 - u_{k+1}^2 = u_{k+1} - u_k > 0$

$\Rightarrow u_{k+2}^2 > u_{k+1}^2 \Rightarrow u_{k+2} > u_{k+1}$

Vậy $u_n < u_{n+1}$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$ hay dãy tăng.

Dạng 3: ***Xét tính bị chặn của một dãy số.***

Phương pháp: Dùng định nghĩa.

Thí dụ 1: Xét tính bị chặn của các dãy số:

a) $u_n = 2n - 1$; **b)** $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$;

c) $u_n = 3.2^{2n-1}$; **d)** $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Giải

a) Ta có: $n \geq 1 \Rightarrow 2n - 1 \geq 1$, mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n \geq 1$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới.

b) Ta có: $\dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_n > 0$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$n \geq 1 \Rightarrow n(n+1) \geq 2$, mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \dfrac{1}{n(n+1)} \leq \dfrac{1}{2}$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$, mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

c) Ta có: $n \geq 1 \Rightarrow 2n - 1 \geq 1$, mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3.2^{2n-1} \geq 3.2 = 6$ mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow u_n \geq 6$, mọi $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới.

d) Ta có: Nếu n lẻ và $n \geq 1$ thì $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n \geq -\dfrac{1}{3}$

Nếu n chẵn và n ≥ 2 thì $\left(-\frac{1}{3}\right)^n \le \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \le u_n \le \frac{1}{9}$, mọi $n \in \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ bị chặn.

C – BÀI TẬP

Bài 1: Viết 5 số hạng đầu của các dãy số sau:

a) $u_n = \frac{1}{2^n}$;   b) $u_n = (-1)^n.2n$

c) $u_n = \frac{3n-1}{2n+3}$;   d) $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}; & \text{khi } n = 2k \\ \frac{n-1}{n}; & \text{khi } n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \ge 1)$

e) $u_n = \cos\frac{n\pi}{2}$;   f) $u_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}$

g) $u_1 = 2;\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1)$;   h) $u_n = n.\sin\frac{n\pi}{2} + n^2.\cos\frac{n\pi}{2}$.

Bài 2: Tìm số hạng tổng quát của dãy:

a) $\sqrt{1.2}; \sqrt{2.3}; \sqrt{3.4}; ...$ b) $\frac{3}{2^2 3^2}; -\frac{5}{3^2.4^4}; \frac{7}{4^2.5^2}; -\frac{9}{5^2.6^2}; ...$

c) $\frac{3}{4}; -\left(\frac{6}{7}\right)^2; \left(\frac{9}{10}\right)^3; -\left(\frac{12}{13}\right)^4; ...$ d) $1; -\left(\frac{1}{1.2}\right)^2; -\left(\frac{1}{1.2.3}\right)^3; -\left(\frac{1}{1.2.3.4}\right)^4; ...$

Bài 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = a + b;\ u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}$ $(n \ge 1)$

Chứng minh: $u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{2}{3};\ u_n = \frac{2n}{2n+1}u_{n-1}$.

Tìm công thức của u_n

Bài 5: Xét tính đơn điệu của các dãy số sau:

a) $u_n = n^2 - 2$;   b) $u_n = \frac{n+1}{n-2}$;

c) $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$; d) $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

e) $u_n = \dfrac{2-n}{\sqrt{n}}$; f) $u_n = n + \cos^2 n$;

g) $u_n = \dfrac{n!}{n^2}$; h) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$;

i) $u_n = (1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{2^2})\ldots(1-\dfrac{1}{2^n})$.

Bài 6: Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{3n^2-2}{n^2+1}$; b) $u_n = \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$;

c) $u_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}$; d) $u_n = \dfrac{6n^3-2n+1}{n^3+2n}$;

e) $u_n = \dfrac{n-7}{2n+3}$; f) $u_n = \dfrac{3n^2+3n+8}{n^2+n+3}$.

Bài 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \dfrac{1}{2}$; $u_n = \dfrac{1}{2}(u_{n-1}{}^2 + 1)$, $n \geq 2$

a) Chứng minh dãy trên tăng;

b) Chứng minh $u_n \leq 1$.

Bài 8: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$; $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$, $n \geq 1$

a) Chứng minh dãy trên giảm;

b) Chứng minh (u_n) bị chặn dưới.

§3. CẤP SỐ CỘNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), ***trong đó kể từ số*** *hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay* ***trước nó cộng với*** *một số không đổi d.*

d: công sai của cấp số cộng.

2. Nếu (u_n) là cấp số cộng có công sai d thì: $u_{n+1} = u_n + d,\ n \in \mathbb{N}^*$.

3. ***Tính chất:***

* *Nếu (u_n) là cấp số cộng có công sai d và số hạng* ***đầu u_1 thì:***

$$u_n = u_1 + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2.$$

* *Nếu (u_n) là cấp số cộng thì:* $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$; $k \geq 2$.

* *Nếu (u_n) là cấp số cộng thì:*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: ***Xác định một cấp số cộng.***

Phương pháp:

- Xác định một cấp số cộng là xác định số hạng đầu u_1 **và công sai d.**
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình **theo ẩn số u_1 và d,** rồi giải hệ đó.

Thí dụ 1: Hãy xác định cấp số cộng (u_n) biết:

a) $u_5 = 19;\ u_9 = 35;$

b) $u_7 - u_3 = 8$ **và** $u_2.u_7 = 75;$

c) $u_3 + u_5 = 14$ **và** $S_{12} = 129.$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 & (1) \\ u_1 + 8d = 35 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) trừ đi (1): $4d = 16 \Rightarrow d = 4$.

Thế vào (1): $u_1 = 19 - 4.4 = 3$

Vậy $u_1 = 3$; $d = 4$.

b) Ta có: $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 6d) - (u_1 + 2d) = 8 \quad (1) \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \quad (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có: $4d = 8 \Rightarrow d = 2$.

Thế vào (2): $(u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \Rightarrow u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{array}\right.$

Vậy $u_1 = 3$; $d = 2$ hoặc $u_1 = -17$; $d = 2$.

c) Ta có:

$$\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 14 \\ \dfrac{12[2u_1 + (12-1)d]}{2} = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \quad (1) \\ 12u_1 + 66d = 129 \quad (2) \end{cases}$$

Giải hệ ta có: $u_1 = \dfrac{5}{2}$; $d = \dfrac{3}{2}$.

Thí dụ 2: **Ba góc của một tam giác vuông lập thành cấp số cộng. Tìm 3 góc đó.**

Giải

Giả sử A, B, C là 3 góc của tam giác vuông ABC vuông tại A.

Ta có: $A = \dfrac{\pi}{2}$ và $A + B + C = \pi$.

Mặt khác: A, B, C lập thành cấp số cộng nên $B = \dfrac{A + C}{2} \Rightarrow 2B = A + C$.

Suy ra: $3B = \pi \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{6}$.

Dạng 2: ***Tính tổng các số hạng trong một cấp số cộng.***

Phương pháp:

* Tính tổng cua n số hang đầu tiên nhờ các công thức:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Thí dụ: **a) Tính tổng các số hạng trong một cấp số nhân có 20 số hạng biết số hạng đầu là 11 và công sai là 4.**

b) Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 10$; $u_9 = 28$. Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Giải

a) Ta có: $u_1 = 11;\ d = 4;\ n = 20;\ S_{20} = \dfrac{20(2.11 + 19.4)}{2} = 980$.

b) Ta có: $\begin{cases} u_3 = 10 \\ u_9 = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ u_1 + 8d = 28 \end{cases}$

Giải hệ ta có: $u_1 = 4;\ d = 3$.

Khi đó: $S_{10} = \dfrac{10(2.4 + 9.3)}{2} = 175$.

Dạng 3: ***Chứng minh một hệ thức trong một cấp số cộng:***

Phương pháp: Sử dụng các tính chất của cấp số cộng.

Thí dụ 1: Cho a, b, c là ba số hạng thứ m, n, p của một cấp số cộng. Chứng minh rằng: $a(n - p) + b(p - m) + c(m - n) = 0$.

Giải

Ta có: $a = u_m = u_1 + (m - 1)d$ (1)

$b = u_n = u_1 + (n - 1)d$ (2)

$c = u_p = u_1 + (p - 1)d$ (3)

(1) và (2) $\Rightarrow b - a = (n - m)d$

(2) và (3) $\Rightarrow c - b = (p - n)d$

$\Rightarrow \dfrac{b - a}{n - m} = \dfrac{c - b}{p - n} \Leftrightarrow (b - a)(p - n) = (c - b)(n - m)$

$\Leftrightarrow bp - bn - ap + an = cn - cm - bn + bm \Leftrightarrow bp - ap + an - cn + cm - bm = 0$

$\Leftrightarrow a(n - p) + b(p - m) + c(m - n) = 0$.

Thí dụ 2: a)Chứng minh rằng trong một cấp số cộng:

$u_m + u_n = u_p + u_q$, với $m + n = p + q$.

b) Áp dụng tính:$u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$, biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$.

Giải

a) $u_m + u_n = [u_1 + (m - 1)d] + [u_1 + (n - 1)d] = 2u_1 + (m + n - 2)d$;

$u_p + u_q = [u_1 + (p - 1)d] + [u_1 + (q - 1)d] = 2u_1 + (p + q - 2)d$;

Vì $m + n = p + q$ nên $m + n - 2 = p + q - 2$.

Từ đó: $u_m + u_n = u_p + u_q$, với $m + n = p + q$.

b) Ta có: $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$

$\Leftrightarrow (u_1 + u_{16}) + (u_7 + u_{10}) + (u_4 + u_{13}) = 147$

$\Leftrightarrow 3(u_1 + u_{16}) = 147 \Leftrightarrow u_1 + u_{16} = 49$.

Khi đó: $u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16} = (u_1 + u_{16}) + (u_6 + u_{11}) = 2(u_1 + u_{16}) = 2.49 = 98$

C – BÀI TẬP.

Bài 1: Xác định cấp số cộng biết:

a) $u_1 + u_5 - u_3 = 10$ và $u_1 + u_6 = 17$;

b) $u_7 + u_{15} = 60$ và $u_4^2 + u_{12}^2 = 1170$;

c) $S_4 = 9$ và $S_6 = \dfrac{45}{2}$;

d) $S_n = 5n^2 + 3n$, với mọi n.

e) $S_n = 4n^2$, với mọi n.

Bài 2: a) Một cấp số cộng có 11 số hạng . Tổng các số hạng là 176. Hiệ giữa số hạng cuối và số hạng đầu là 30. Xác định cấp số cộng đó.

b) Bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của chúng là 22. Tổng cá bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.

c) Người ta trồng 3003 cây theo hình tam giác: hàng thứ nhất có 1 cây hàng thứ hai có 2 cây,... Hỏi có bao nhiêu hàng.

d) Giữa hai số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số để ta được một cấp số cộng.

Bài 3: a) Tính tổng tất cả các số tự nhiên lẻ lớn hơn 50 và nhỏ hơn 100.

b) Tính tổng tất cả các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 2007.

Bài 4: a) Cho cấp số cộng có $S_{10} = -85$; $S_{15} = -240$. Tính S_{20}.

b) Biết: $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + u_n}_{\text{n số hạng}} = 17161$. Tính n.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu a, b,c là 3 số tạo thành một cấp số cộng thì 3 số sau cũng tạo thành một cấp số cộng:

a) $x = b^2 + bc + c^2$; $y = c^2 + ca + a^2$; $z = a^2 + ba + b^2$;

b) $x = a^2 - bc$; $y = b^2 - ca$; $z = c^2 - ab$.

Bài 6: Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đều khác 0.

a) Chứng minh: $\dfrac{1}{u_1.u_2} + \dfrac{1}{u_2.u_3} + \ldots + \dfrac{1}{u_{n-1}u_n} = \dfrac{n-1}{a_1a_n}$

b) Giả thiết thêm $u_i > 0$, với mọi i. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}$$

§4. CẤP SỐ NHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

q: công bội của cấp số nhân.

2. Nếu (u_n) là cấp số nhân có công bội q thì: $u_{n+1} = u_n q$, $n \in \mathbb{N}^*$.

*3. **Tính chất:***

* *Nếu (u_n) là cấp số nhân có công bội q và số hạng đầu u_1 thì:*

$$u_n = u_1 q^{n-1},\ n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq 2.$$

* *Nếu (u_n) là cấp số nhân thì:* $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$; $k \geq 2$.

* *Nếu (u_n) là cấp số nhân thì:* $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$; $q \neq 1$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Xác định một cấp số nhân.***

Phương pháp:

- Xác định một cấp số nhân là xác định số hạng đầu u_1 và công bội q.
- Từ những giả thiết ta thường lập hệ phương trình theo ẩn số u_1 và q, rồi giải hệ đó.

Thí dụ 1: Cho dãy số (u_n): $\dfrac{\sqrt{3}}{2}; 1; \dfrac{2\sqrt{3}}{2}; \dfrac{4}{3}; \ldots$

a) Dãy (u_n) có phải là một cấp số nhân không ? Nếu phải hãy tìm số hạng đầu u_1 và công bội q.

b) Tính u_n; S_5.

Giải

a) Ta có: $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{u_4}{u_3} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}; \ldots$

Vậy (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $q = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

b) $u_n = u_1.q^{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.(\frac{2}{\sqrt{3}})^{n-1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n-2}$;

$$S_5 = \frac{u_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}[1-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^5]}{1-\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{9\sqrt{3}-32}{9(\sqrt{3}-2)} = \frac{52+37\sqrt{3}}{18}.$$

Thí dụ 2: **Hãy xác định cấp số nhân (u_n) biết:**

a) $u_5 = 96; u_6 = 192$;

b) $u_4 - u_2 = 72$ và $u_5 - u_3 = 144$.

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^4 = 96 & (1) \\ u_1q^5 = 192 & (2) \end{cases}$

Chia (2) cho (1): $q = 2$.

Thế vào (1): $u_1.2^4 = 96 \Rightarrow u_1 = \frac{96}{16} = 6$.

Vậy $u_1 = 6$; $q = 2$.

b) Ta có: $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 72 \\ u_1q^4 - u_1q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q(q^2-1) = 72 & (1) \\ u_1q^2(q^2-1) = 144 & (2) \end{cases}$

Chia (2) cho (1) ta có: $q = 2$.

Thế vào (1): $2u_1(2^2 - 1) = 144 \Rightarrow u_1 = \frac{144}{6} = 24$.

Vậy $u_1 = 24$; $q = 2$.

Dạng 2: ***Chứng minh một hệ thức trong một cấp số nhân***

Phương pháp: Sử dụng các tính chất của cấp số nhân.

Thí dụ 1: **Chứng rằng ba số a, b, c lập thành một cấp số nhân khi và ch**
khi: $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$.

Giải

Ta có: $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

$\Leftrightarrow a^2b^2 + a^2c^2 + b^4 + b^2c^2 = a^2b^2 + 2b^2ac + b^2c^2$

$\Leftrightarrow a^2c^2 + b^4 - 2b^2ac = 0 \Leftrightarrow (ac - b^2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow b^2 = ac \Leftrightarrow$ a; b; c lập thành một cấp số nhân.

Thí dụ 2: Cho a, b, c là ba số hạng thứ m, n, p của một cấp số nhân. Chứng minh rằng: $a^{n-p}.b^{p-m}.c^{m-n} = 1$.

Giải

Ta có: $a = u_m = u_1q^{m-1}$ (1)

$b = u_n = u_1q^{n-1}$ (2)

$c = u_p = u_1q^{p-1}$ (3)

(1) và (2) $\Rightarrow \frac{b}{a} = q^{n-m} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{p-n} = q^{(n-m)(p-n)}$

(2) và (3) $\Rightarrow \frac{c}{b} = q^{p-n} \Rightarrow \left(\frac{c}{b}\right)^{n-m} = q^{(n-m)(p-n)}$

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{p-n} = \left(\frac{c}{b}\right)^{n-m} \Leftrightarrow b^{p-n}.b^{n-m} = a^{p-n}c^{n-m} \Leftrightarrow b^{p-m} = a^{p-n}c^{n-m}$$

$$\Leftrightarrow b^{p-m}\frac{1}{a^{p-n}}.\frac{1}{c^{n-m}} = 1 \Leftrightarrow a^{n-p}.b^{p-m}.c^{m-n} = 1$$

Thí dụ 3: a)Chứng minh rằng trong một cấp số nhân:

$u_m.u_n = u_p.u_r$, với $m + n = p + r$

b) Áp dụng tính: $u_1.u_6.u_{11}.u_{16}$, biết $u_1.u_4.u_7.u_{10}.u_{13}.u_{16} = 125$.

Giải

a) $u_m.u_n = (u_1q^{m-1})(u_1q^{n-1}) = u_1^2q^{m+n-2}$;

$u_p.u_r = (u_1q^{p-1})(u_1q^{r-1}) = u_1^2q^{p+r-2}$;

Vì $m + n = p + q$ nên $m + n - 2 = p + r - 2$.

Từ đó: $u_m.u_n = u_p.u_q$, với $m + n = p + q$.

b) Ta có: $u_1.u_4.u_7.u_{10}.u_{13}.u_{16} = 125 \Leftrightarrow (u_1.u_{16})(u_7.u_{10})(u_4.u_{13}) = 125$

$\Leftrightarrow (u_1.u_{16})^3 = 125 \Leftrightarrow u_1.u_{16} = 5$.

Khi đó: $u_1u_6u_{11}u_{16} = (u_1u_{16})(u_6u_{11}) = (u_1u_{16})^2 = 5^2 = 25$.

C – BÀI TẬP.

Bài 1: Xác định cấp số nhân biết:

a) $u_7 = 192$; $u_3 = 12$; b) $u_1 - u_3 + u_5 = 65$ và $u_1 + u_7 = 325$;

c) $u_3 + u_5 = 90$ và $u_2 - u_6 = 240$;

Bài 2: a) Cho số 2 và 54. Hãy điền vào giữa hai số ấy 2 số sao cho ta được một cấp số nhân.

b) Cho hai số 3 và 48. Hãy điền vào giữa hai số ấy 3 số sao cho ta được một cấp số nhân.

c) Cho a > 0, b > 0. Hãy điền vào giữa hai số $\frac{a}{b^2};\frac{b}{a^2}$ 5 số sao cho ta được một cấp số nhân.

Bài 3: Tìm hai số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b tạo thành một cấp số cộng, còn $(b+1)^2$, ab + 5, $(a+1)^2$ tạo thành một cấp số nhân.

Bài 4: Cho $A = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ số } 1}$. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$$

Bài 5: Chứng minh rằng trong một cấp số nhân ta có: $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$.

Bài 6: Cho a, b, c, d theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Chứng minh:

a) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$;

b) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

c) Tổng quát b): $(a^n + b^n + c^n)(a^n - b^n + c^n) = a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$

d) Áp dụng: Xác định 3 số biết chúng lập thành một cấp số nhân sao cho: tổng các nghịch đảo của chúng là 36 và tổng các bình phương các nghịch đảo của chúng là 364.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP.

§1. PHƯƠNG PHÁP QUI NẠP TOÁN HỌC

Bài 1: a) Khi n = k + 1: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$

$$= (k+1)^2.\left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

b) Khi n = k+ 1: $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 2k + (2k+1) - 2(k+1) + [2(k+1)+1]$

$= k + 1 - 2(k+1) + [2(k+1)+1] = (k+1) + 1.$

c) Khi n = k + 1:

$$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \ldots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]}$$

$$\frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+1}\left[\frac{k}{2} + \frac{k+1}{2k+3}\right]$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

d) Khi $n = k + 1$: $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}.$$

e) Khi $n = k + 1$:

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4(k+1)(k+2)}\left[k(k+3) + \frac{4}{k+3}\right]$$

$$= \frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}.$$

f) Khi $n = k + 1$: $1.4 + 2.7 + \ldots + k(3k+1) + (k+1)[3(k+1)+1]$

$= k(k+1)^2 + (k+1)[3(k+1)+1] = (k+1)[k(k+1) + 3k + 4]$

$= (k+1)(k^2+4k+4) = (k+1)(k+2)^2$.

g) Khi $n = k + 1$: $\frac{3}{1.2.2} + \frac{4}{2.3.2^2} + \ldots + \frac{k+2}{k(k+1).2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2).2^{k+1}}$

$$= 1 - \frac{1}{(k+1).2^k} + \frac{k+3}{(k+1)(k+2).2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{(k+1).2^{k+1}}\left(2 - \frac{k+3}{k+2}\right)$$

$$= 1 - \frac{k+1}{(k+1)(k+2).2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{(k+2).2^{k+1}}.$$

Bài 2: a) Khi $n = k + 1$: $(k+1)^3 + 2(k+1) = k^3 + 1 + 3(k^2+k+1)$ chia hết cho 3.

b) Khi $n = k + 1$:

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3)$ chia hết cho 9.

c) Khi n = k + 1: $13^{k+1} - 1 = 13.13^k - 1 = (13^k - 1) + 12.13^k$ chia hết cho 6.

d) Khi n = k + 1:

$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4.4^k + 15k + 14 = 13(4^k + 15k - 1) - 9(4^k + 20k - 3)$ chia hết cho 9.

e) Khi n = k + 1:

$3^{2k+3} + 2^{k+3} = 9.3^{2k+1} + 2.2^{k+2} = 2(3^{2k+1} + 2^{k+2}) + 7.3^{2k+1}$ chia hết cho 7.

f) Khi n = k + 1:

$6^{2k+2} + 3^{k+3} + 3^{k+1} = 36.6^{2k} + 3.3^{k+2} + 3.3^k = 3(6^{2k} + 3^{k+2} + 3^k) + 33.6^{2k}$ chia hết cho 11.

Bài 3: a) Khi n = k + 1: $(k+1)! = k!(k+1) < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1)$

$$\Leftrightarrow (k+1)! < 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

Ta chứng minh: $2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1} \Leftrightarrow 2 < \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}$.

$$\Leftrightarrow 2 < \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1}$$

$\Leftrightarrow 2 < 1 + (k+1)\frac{1}{k+1} + \ldots$ (khai triển nhị thức Niu tơn): luôn đúng.

Vậy $(k+1)! < \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}$.

b) n = 2: $\tan 2\alpha - 2\tan\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} - 2\tan\alpha = \frac{2\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)} < \frac{\pi}{4}$ nên $0 < \tan\alpha < 1 \Rightarrow 1 - \tan^2\alpha > 0$

Từ đó: $\tan 2\alpha > 2\tan\alpha$

Giả sử: n = k: $\tan(k\alpha) > k.\tan\alpha$.

n = k + 1: $\tan(k+1)\alpha = \frac{\tan k\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan k\alpha.\tan\alpha}$.

Vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4k}$ nên $0 < k\alpha < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan k\alpha < 1$

$\Rightarrow 0 < \tan k\alpha.\tan\alpha < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \tan k\alpha.\tan\alpha < 1.$

Từ đó: $\tan(k+1)\alpha = \dfrac{\tan k\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan k\alpha.\tan\alpha} > \tan k\alpha + \tan\alpha > (k+1)\tan\alpha.$

§2. DÃY SỐ

Bài 1:

a) ĐS: $u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = \dfrac{1}{4}; u_3 = \dfrac{1}{8}; u_4 = \dfrac{1}{16}; u_5 = \dfrac{1}{32};$

b) ĐS: $u_1 = -2; u_2 = 4; u_3 = -6; u_4 = 8; u_5 = -10;$

c) ĐS: $u_1 = \dfrac{2}{5}; u_2 = \dfrac{5}{7}; u_3 = \dfrac{8}{9}; u_4 = 1; u_5 = \dfrac{14}{13};$

d) ĐS: $u_1 = 0; u_2 = \dfrac{1}{2}; u_3 = \dfrac{2}{3}; u_4 = \dfrac{1}{4}; u_5 = \dfrac{4}{5};$

e) ĐS: $u_1 = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0; u_2 = -1; u_3 = 0; u_4 = 1; u_5 = 0;$

f) ĐS: $u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = \dfrac{3}{8}; u_3 = \dfrac{15}{48}; u_4 = \dfrac{105}{384}; u_5 = \dfrac{495}{3840};$

g) ĐS: $u_1 = 2; u_2 = 1; u_3 = \dfrac{2}{3}; u_4 = \dfrac{5}{9}; u_5 = \dfrac{14}{27};$

h) ĐS: $u_1 = 1; u_2 = -4; u_3 = -3; u_4 = 16; u_5 = 5;$

Bài 2:

a) ĐS: $u_n = \sqrt{n(n+1)}$;

b) ĐS: $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{(n+1)^2(n+2)^2}$;

c) ĐS: $u_n = (-1)^{n-1}\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$;

d) ĐS: $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n!)^n}$

Bài 3:

Ta có: $u_1 = a + b = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$;

Giả sử: $u_k = \dfrac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a^k - b^k}$.

Ta có: $u_{k+1} = a + b - \frac{ab}{u_k} = a + b - \frac{ab(a^k - b^k)}{a^{k+1} - b^{k+1}} = \frac{a^{k+2} - b^{k+2}}{a^{k+1} - b^{k+1}}$

Vậy $u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n}$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Bài 4: Ta có:

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}u_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}u_{n-2} = \frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2n-1}.\frac{2(n-2)}{2n-3}u_{n-3} = \ldots =$$

$$= \frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2n-1}.\frac{2(n-2)}{2n-3}\ldots\frac{2.3}{7}.\frac{2.2}{4}u_1$$

$$= \frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2n-1}.\frac{2(n-2)}{2n-3}\ldots\frac{2.3}{7}.\frac{2.2}{5}.\frac{2}{3} = \frac{2^n.n!}{3.5\ldots(2n+1)}.$$

Bài 5:

a) Dãy tăng: $H = u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 0$.

b) Dãy giảm: $u_n = \frac{n+1}{n-2} = 1 + \frac{3}{n-2}$. $H = u_{n+1} - u_n = \frac{3}{n-1} - \frac{3}{n-2} < 0$.

c) Dãy tăng: $H = u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{n+2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2+3n+1}{(n+2)(n+1)} > 0$.

d) Dãy tăng: $H = u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.

e) Dãy giảm: $u_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

$$H = u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) = \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}} + 1\right) < 0.$$

f) Dãy tăng: $H = u_{n+1} - u_n = 1 - \cos^2 n + \cos^2(n+1) = \sin^2 n + \cos^2(n+1) > 0$.

g) Dãy giảm: $T = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} < 1$.

h) Dãy giảm: $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \dfrac{2}{n+1} < 1$.

i) Dãy giảm: $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} < 1$.

Bài 6:

a) Vì $n \geq 1$ nên $u_n \geq \dfrac{1}{2}$; $u_n = \dfrac{3n^2 - 2}{n^2 + 1} = 3 - \dfrac{5}{n^2 + 1} \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 3$.

b) Vì $n \geq 1$ nên $u_n \geq 0$; $u_n = \dfrac{n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} < \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} < \dfrac{n}{\sqrt{n^2}} = 1 \Rightarrow 0 \leq u_n < 1$.

c) Vì $n \geq 1$ nên: n lẻ: $u_n = \dfrac{n - 1}{2n + 1} \geq 0$; n chẵn: $u_n = \dfrac{n + 1}{2n + 1} \leq \dfrac{3}{5} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \dfrac{3}{5}$.

d) $u_n = \dfrac{6n^3 - 2n + 1}{n^3 + 2n} = \dfrac{2n(3n^2 - 1) + 1}{n(n^2 + 2)} > 0$; $u_n = 6 - \dfrac{14n - 1}{n^3 + 2n} < 6 \Rightarrow 0 < u_n < 6$.

e) Vì $n \geq 1$ nên $u_n \geq -\dfrac{6}{5}$; $u_n = \dfrac{n - 7}{2n + 3} < \dfrac{n}{2n + 3} < \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{6}{5} \leq u_n < \dfrac{1}{2}$;

f) Vì $n \geq 1$ nên $u_n \geq \dfrac{14}{5}$; $u_n = \dfrac{3n^2 + 3n + 8}{n^2 + n + 3} = 3 - \dfrac{1}{n^2 + n + 3} < 3 \Rightarrow \dfrac{14}{5} \leq u_n < 3$;

Bài 7:

a) $H = u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}(u_n^2 + 1) - u_n = \dfrac{1}{2}u_n^2 - u_n + \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ dãy tăng.

b) Khi $n = 1$: $u_1 = \dfrac{1}{2} \leq 1$

Giả sử: $u_k \leq 1$. Ta có: $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}(u_k^2 + 1) \leq \dfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$.

Vậy $u_n \leq 1$.

Bài 8:

a) Ta có: $u_1 = 2 > u_2 = \dfrac{3}{2}$

Giả sử: $u_k > u_{k+1}$.

Ta có: $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > \frac{u_{k+1} + 1}{2} = u_{k+2}$.

Vậy: $u_{n+1} < u_n$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ Dãy giảm.

b) Ta có: $u_1 = 2 > 1$.

Giả sử: $u_k > 1$.

Ta có: $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$.

Vậy: $u_n < 1$, mọi $n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ dãy bị chặn dưới.

§3. CẤP SỐ CỘNG

Bài 1:

a) HD: $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases}$

b) HD: $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 10d = 30 \\ u_1^2 + 14du_1 + 65d^2 = 585 \end{cases}$

Giải hệ ta có: $u_1 = -12$; $d = \frac{21}{5}$ hoặc $u_1 = 0$; $d = 3$.

c) HD: $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \frac{45}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2u_1 + 3d) = 9 \\ 3(2u_1 + 5d) = \frac{45}{2} \end{cases}$. ĐS: $u_1 = 0$; $d = \frac{3}{2}$.

d) $S_n = 5n^2 + 3n$, với mọi n $\Leftrightarrow 5n^2 + 3n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$, với mọi n

$\Leftrightarrow 10n + 6 = 2u_1 + nd - d$, với mọi n $\Leftrightarrow (10 - d)n + 6 + d - 2u_1 = 0$, với mọi n

$\Leftrightarrow \begin{cases} 10 - d = 0 \\ 6 + d - 2u_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 10 \\ u_1 = 8 \end{cases}$

e) Làm tương tự d.

Bài 2:

a) Ta có: $\begin{cases} S_{11} = 176 \\ u_{11} - u_1 = 30 \end{cases}$. ĐS: $u_1 = 1$, $d = 3$.

b) Ta có: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 22 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 166 \end{cases}$. ĐS: $u_1 = 1$, $d = 3$ hoặc $u_1 = 10$, $d = -3$.

c) Gọi n là số hàng cây.

Ta có: số cây lần lượt trên mỗi hàng là: 1, 2, 3, …,n lập thành cấp số cộng: $u_1 = 1$, $d = 1$. Vì vậy: $\dfrac{n[2+(n-1).1]}{2} = 3003 \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0$

$\Leftrightarrow n = 77$.

d) Ta có sơ đồ: $\underbrace{7, \ldots\ldots\ldots\ldots 35}_{\text{6 số hạng}}$

Vì vậy, ta có: $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = 35 \end{cases}$. ĐS: Các số đó là: 11, 15, 19, 23, 27, 31.

Bài 3:

a) Từ 50 đến 100 có tất cả 25 số lẻ. Ta xem các số lẻ này là các số hạng của cấp số cộng có $u_1 = 51$ và $u_{25} = 99$. Khi đó: $S_{25} = \dfrac{25(51+99)}{2} = 1875$.

b) Số các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 2007 là 1003 số. Ta xem các số chẵn này là các số hạng của cấp số cộng có $u_1 = 2$ và $u_{1003} = 2006$. Khi đó:

$$S_{1003} = \frac{1003.(2+2006)}{2} = 1007012.$$

Bài 4:

a) $\begin{cases} S_{10} = -85 \\ S_{15} = -240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 9d = -17 \\ 2u_1 + 14d = -32 \end{cases} \Rightarrow d = -3;\ u_1 = 5 \Rightarrow S_{20} = -470.$

b) Các số hạng; 1, 3 ,5…lập thành cấp số cộng với $d = 2$; $u_1 = 1$.

$\Rightarrow S_n = n^2 = 17161 \Rightarrow n = 131$.

Bài 5: Ta có: $b = \dfrac{a+c}{2}$.

$x + z = b^2 + bc + c^2 + a^2 + ba + b^2 = c^2 + a^2 + b(a + c) + 2b^2 = c^2 + a^2 + 4b^2$

$= c^2 + a^2 + (a + c)^2 = 2(c^2 + a^2 + ac) = 2y$

Vậy x, y, z là một cấp số cộng.

Bài 6: Nếu $d = 0$ thì $u_1 = u_2 = \ldots = u_n \Rightarrow$ đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu $d \neq 0$, ta có:

$$\frac{1}{u_1u_2}=\frac{1}{u_1(u_1+d)}=\frac{1}{d}(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_1+d})=\frac{1}{d}(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2})$$

$$\frac{1}{u_2u_3}=\frac{1}{u_2(u_2+d)}=\frac{1}{d}(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_2+d})=\frac{1}{d}(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3})$$

……

$$\frac{1}{u_{n-1}u_n}=\frac{1}{u_{n-1}(u_{n-1}+d)}=\frac{1}{d}(\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_{n-1}+d})=\frac{1}{d}(\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_n})$$

Khi đó:

$$\frac{1}{u_1.u_2}+\frac{1}{u_2.u_3}+\ldots+\frac{1}{u_{n-1}u_n}=\frac{1}{d}(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}+\ldots.+\frac{1}{u_{n-1}}-\frac{1}{u_n})$$

$$=\frac{1}{d}.(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_n})=\frac{1}{d}.\frac{u_n-u_1}{a_aa_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

§4. CẤP SỐ NHÂN

Bài 1:

a) $\begin{cases}u_7=192\\u_5=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^6=192\\u_1q^4=12\end{cases}\Leftrightarrow q^2=16\Leftrightarrow q=\pm4.$

ĐS: $q = 4$; $u_1=\frac{3}{64}$ hoặc $q = -4$; $u_1=\frac{3}{64}$.

b) $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\u_1+u_7=325\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1-u_1q+u_1q^4=72\\u_1+u_1q^6=325\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1(1-q-q^4)=65\\u_1(1+q^6)=325\end{cases}$

$\Rightarrow 1+q^2=5\Rightarrow q=\pm2\Rightarrow u_1=5.$

c) $\begin{cases}u_3+u_5=90\\u_2-u_6=240\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^2+u_1q^4=90\\u_1q-u_1q^5=240\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1q^2(1+q^2)=90\\u_1q(1-q^4)=240\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-3;u_1=1\\q=\frac{1}{3};u_1=729\end{cases}$

Bài 2:

Ta có sơ đồ: 2, .2 số hạng…,54

Vì vậy, ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_4 = 54 \end{cases}$. ĐS: Các số đó là: 2, 6, 18, 54.

b) Làm tương tự như trên. ĐS: 3; 6; 12; 24; 48 và 3; -6; 12; -24; 48.

c) Có 2 đáp số tương ứng $q = \pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

Bài 3: a, a + 2b, 2a + b tạo thành một cấp số cộng $\Rightarrow a + 2a + b = 2(a + 2b)$

$\Rightarrow a = 3b$ $(b + 1)^2$, $ab + 5$, $(a + 1)^2$ tạo thành một cấp số nhân

$\Rightarrow (ab + 5)^2 = (b + 1)^2(a + 1)^2 \quad \Rightarrow ab + 5 = (b + 1)(a + 1)$

Ta có hệ: $\begin{cases} a=3b \\ ab+5=(b+1)(a+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$.

Bài 4: Ta có: $9A = 9 + 99 + 999 + \ldots.. + \underbrace{99\ldots\ldots9}_{n \text{ số } 1} =$

$= (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots. + (10^n - 1) =$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - n =$

$$\frac{10(1 - 10^n)}{1 - 10} - n = \frac{10(10^n - 1)}{9} - n$$

$$\Rightarrow A = \frac{10(10^n - 1)}{81} - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 10}{81} - \frac{n}{9} = \frac{10^{n+1} - 9(n + 1) - 1}{81}$$

Bài 5: Ta có:

$$S_n(S_{3n} - S_{2n}) = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.\left[\frac{u_1(1 - q^{3n})}{1 - q} - \frac{u_1(1 - q^{2n})}{1 - q}\right]$$

$$= \frac{u_1^{\ 2}}{(1 - q)^2}.(1 - q^n)(q^{2n} - q^{3n}) = \frac{u_1^{\ 2}}{(1 - q)^2}.q^{2n}(1 - q^n)^2 = \left[\frac{u_1q^n(1 - q^n)}{1 - q}\right]^2.$$

$$(S_{2n} - S_n)^2 = \left[\frac{u_1(1 - q^{2n})}{1 - q} - \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}\right]^2 = \left[\frac{u_1q^n(1 - q^n)}{1 - q}\right]^2$$

Vậy ta có ĐPCM.

Bài 6: Để ý: $b^2 = ac$; $c^2 = bc$; $ad = bc$.

) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$

$= a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^4 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2b^2 + c^4 + c^2d^2$

$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + (a^2c^2 + b^4) + (b^2d^2 + c^4) + (a^2d^2 + c^2b^2)$

$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + (b^2ac + b^2ac) + (bc^2d + bc^2d) + (abcd + abcd)$

$= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + 2b^2ac + 2bc^2d + 2abcd = (ab + bc + cd)^2$.

b) $(a + b + c)(a - b + c) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + c^2 + 2ac - b^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

c) Tương tự b).

d) Gọi 3 số là a, b, c. Ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 26 \\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = 364 \end{cases}$

Mặt khác: do a, b, c lập thành cấp số nhân nên $ac = b^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{ac} = \dfrac{1}{b^2} \Rightarrow \dfrac{1}{a}.\dfrac{1}{c} = \left(\dfrac{1}{b}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{a};\dfrac{1}{b};\dfrac{1}{c}$ cũng lập thành một cấp số nhân.

Theo trên ta có:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{364}{26} = 14.$$

Từ đó, ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 26 \\ \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 14 \end{cases}$. Giải hệ này ta được 3 số là: $\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{18}$.

Chương IV : GIỚI HẠN

§ 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giới hạn hữu hạn

- Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon}$$

*Dãy số (v_n) có giới hạn là số a khi n dần tới dương vô cực, nếu $v_n = a + u_n$ và

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow |v_n - a| < \varepsilon}$$

2. Giới hạn ± ∞

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi n dần tới dương vô cực, nếu u_n lớn hơn một số dương cho trước lớn tuỳ ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n > M}$$

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi n dần tới dương vô cực, nếu u_n nhỏ hơn một số âm cho trước nhỏ tuỳ ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n < -M}$$

3. Các giới hạn đặc biệt:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} C = C$ với C là hằng số , $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty, \forall k \in N^*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $|q| > 1$

4. Các định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$, khi đó:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = a - b$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n.v_n) = a.b$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ (với $u_n \geq 0$ với mọi $n \in N^*$)

Định lí 2. Nếu ba dãy số (u_n), (v_n), (w_n) thoả mản:

$v_n \leq u_n \leq w_n$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Định lí 3. Mọi dãy tăng và bị chặn trên đều có giới hạn.

Mọi dãy giảm và bị chặn dưới đều có giới hạn.

5. Định lí về giới hạn ± ∞

Định lí 4. a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$

b) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n \in N^*$ thì

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$

c) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$

6. Cấp số nhân lùi vô hạn

- *Cấp số nhân lùi vô hạn* là cấp số nhân vô hạn có công bội q thoả mãn $|q| < 1$
- Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) :

$$\boxed{S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}}$$

7. Số e: $e = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ với $e \approx 2,718$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Dùng định nghĩa để chứng minh giới hạn của dãy số

Phương pháp: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

a) Tìm số n sao cho $|u_n - 2| < \frac{1}{100}$

b) Chứng minh rằng với mọi n > 2007 thì các số hạng của dãy số (u_n) đều nằm trong khoảng (1, 998 ; 2,001).

Giải.

a) Ta có: $|u_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{-3}{n+2}\right| = \frac{3}{n+2}$

$$|u_n - 2| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n+2 > 300 \Leftrightarrow n > 298$$

b) $khi\ n > 2007 \Leftrightarrow n+2 > 2009 \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} < \frac{3}{2009} \Leftrightarrow |u_n - 2| < \frac{3}{2009}$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{3}{2009} < u_n < 2 + \frac{3}{2009} \Leftrightarrow 1{,}998 < u_n < 2{,}001$$

ài 2. Chứng minh a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty, \forall k \in N^*$

Giải

) Ta có: $|u_n - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$

Với $\varepsilon > 0$ mà $|u_n - 1| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, chọn $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}, n_0 \in N$

Khi đó: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N. \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$

) Lấy số dương M lớn tuỳ ý, từ $u_n > M \Rightarrow n^k > M \Rightarrow n > \sqrt[k]{M}$

Chọn $n_0 > \sqrt[k]{M}, n_0 \in N$, khi đó: $\forall n > n_0 \Rightarrow n > \sqrt[k]{M} \Rightarrow u_n > M$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$.

ạng 2. Tìm giới hạn của dãy số bằng công thức

hương pháp:

Áp dụng các phép toán về giới hạn hữu hạn và các định lí về quan hệ iữa giới hạn 0 và giới hạn ± ∞.

Để thực hiện các phép toán trên thông thường ta phải thực hiện một vài iến đổi biểu thức xác định dãy số đã cho:

- Nếu biểu thức có dạng phân thức mà tử và mẫu đều chứa luỹ thừa của n thì chia tử và mẫu cho n^k, với k là số mũ cao nhất.
- Nếu biểu thức đã cho có chứa n dưới dấu căn thì nhân tử và mẫu cùng một biểu thức liên hợp theo các hằng đẳng thức:

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ khi có dấu căn bậc hai

$(A\pm B)(A^2\mp AB+B^2)=A^3\pm B^3$ khi có dấu căn bậc ba

3. Hoặc chúng ta áp dụng định lí về dãy bị kẹp giữa hai dãy có cùng mộ giới hạn.

Bài 3. Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-n-1}{3+2n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-\dfrac{2}{n+1}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-n^2+n\sqrt{n+1}\right)$

Giải

a) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2-n-1}{3+2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(4-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{3}{n^2}+2\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+2}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}4-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}}{3\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to+\infty}2}=\frac{4-0-0}{3.0+2}=2$$

b) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(\sqrt{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-2\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}-2}$$

$$=\frac{\sqrt{0+0}+0}{0-2}=0$$

c) $$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-\frac{2}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n^2-2}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}-\right.}{n^3\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right.}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=+\infty$$

$$d)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n\left(\frac{(-2)^n}{3^n}+1\right)}{3^n\left(\frac{(-2)^{n+1}}{3^n}+3\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{(-2)\left(-\frac{2}{3}\right)^n+3}$$

$$=\frac{0+1}{(-2).0+3}=\frac{1}{3}$$

$$e)\ \lim_{n\to+\infty}\left(-n^2+n\sqrt{n}+1\right)=\lim_{n\to+\infty}(-n^2)\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}(n^2)\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n^2}\right)=-\infty$$

Bài 4. Tính giới hạn của các dãy số sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n+2)$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sqrt{1+2+3+...+n}}{n^2+n+1}$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

Giải

$$a)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n+2\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}+2\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}+2\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}+2\right)=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$$

$$b)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n)(\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2)}{\sqrt[3]{(n^3-2n^2)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}$$

$$=-2\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\sqrt[3]{n^6-4n^5+4n^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}$$

$$= -2\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^4}}+1\right)}$$

$$= -2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1-\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^4}}+1} = -\frac{2}{3}$$

c) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{1+2+3+\ldots+n}}{n^2+n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n\left(\frac{1+n}{2}\right)}}{n^2+n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{n^2+n}}{(n^2+n+1)\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+1}-(2n-1))(\sqrt{4n^2+1}+(2n-1))(\sqrt{n^2+2n}+n)}{(\sqrt{4n^2+1}+(2n-1))\sqrt{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{4n\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{4n^2+1}+(2n-1)\right)2n} = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2-\frac{1}{n}\right)}$$

$$= 2\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2-\frac{1}{n}} = 1$$

e) $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

Ta có: $\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$;... ; $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$

Bài 5. Tính giới hạn của các dãy số sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Giải

a) Ta có: $0<\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n$ với $\forall$ n $\in$ N^*

Suy ra: $0\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}\right)^n\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}\right)^n=0$

b) Ta có: $-5\le 3\sin n+4\cos n\le 5$

$\Rightarrow\frac{-5}{n+1}\le\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}\le\frac{5}{n+1}$ với $\forall$ n $\in$ N^*

Suy ra:

$$0=\lim_{n\to+\infty}\frac{-5}{n+1}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n+1}=0$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}=0$$

c) Ta có: $u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ nên

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ $\forall$ n $\in$ N^*

Suy ra: $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Mà $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$,

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Dạng 3. Chứng minh một dãy số có giới hạn

Phương pháp:

1. Áp dụng định lí Vâyơstraxơ

- Nếu dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên thì nó có giới hạn.
- Nếu dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới thì nó có giới hạn.

2. Chứng minh một dãy số tăng và bị chặn trên (dãy số giảm và bị chặn dưới) bởi số M ta thực hiện: Tính một vài số hạng đầu tiên của dãy và quan sát mối liên hệ để dự đoán chiều tăng (chiều giảm) và số M

3. Tính giới hạn của dãy số ta thực hiện theo một trong hai phương pháp sau:

- *Phương pháp 1*: - Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn.

- Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$

- Từ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ ta được một phương trình theo ẩn a.

- Giải phương trình tìm nghiệm a và giới hạn của dãy số (u_n) là một trong các nghiệm của phương trình. Nếu phương trình có nghiệm duy nhất thì đó chính là giới hạn của dãy cần tìm; Còn nếu phương trình có nhiều hơn một nghiệm thì dựa vào tính chất của dãy để loại nghiệm

- Chú ý: Giới hạn của dãy số nếu có là duy nhất.

- *Phương pháp 2*: - Tìm công *thức* tổng quát u_n của dãy số bằng cách dự đoán

  - Chứng minh công thức tổng quát u_n bằng phương pháp quy nạp toán học.
  - Tính giới hạn của dãy thông qua công thức tổng quát đó.

Bài 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ nếu $n \geq 1$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có: $u_1 = \sqrt{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$, $u_n > 0$ với $\forall$ n $\in$ N

* Ta chứng minh: $u_n < 2$ với $\forall$ n $\in$ N (1)

Với n = 1, ta có $u_1 = \sqrt{2} < 2$ thì (1) đúng

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k thì $u_k < 2$

Khi n = k + 1, ta có $u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} < \sqrt{2+2} \Rightarrow u_{k+1} < 2$.

Vậy $u_n < 2$ với $\forall$ n $\in$ N

- Chứng *minh* (u_n) là dãy tăng:

Xét $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow \sqrt{2+u_n} > u_n \Leftrightarrow u_n^2 - u_n - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < u_n < 2$

Mà $0 < u_n < 2$ nên $u_{n+1} > u_n$. Vậy (u_n) là dãy số tăng (2)

Từ (1) và (2) suy ra (u_n) có giới hạn

- Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $0 \leq a \leq 2$

Ta có: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2+u_n} \Rightarrow a = \sqrt{2+a}$

$$a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \text{ (loại)} \\ a = 2 \end{array}\right. \quad \text{Vậy } \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

Bài 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \text{ nếu } n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có: $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{3}{4}$; $u_4 = \frac{4}{5}$;...... ; $u_n = \frac{n}{n+1}$ (1)

Với n = 1, ta có: $u_1 = \frac{1}{2}$ (đúng)

Giả sử (1) đúng với n = k thì ta có $u_k = \frac{k}{k+1}$

Khi n = k + 1 thì $u_{k+1} = \dfrac{1}{2-u_k} = \dfrac{1}{2-\dfrac{k}{k+1}} = \dfrac{k+1}{k+2}$ Vậy $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ với $\forall n \in N^*$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Bài 8. Cho dãy số (u_n) được xác định $u_n = \sin n$. Chứng minh dãy số (u_n) không có giới hạn.

Giải

Giả sử $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sin n = a$, khi đó

$\lim_{n\to+\infty} \sin(n+2) = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\sin(n+2) - \sin n\right) = 0$

Suy ra: $2\lim_{n\to+\infty} \cos(n+1)\sin 1 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \cos(n+1) = 0$

Mặt khác: cos(n + 1) = cosn.cos1 - sinn.sin1 và

$\lim_{n\to+\infty} \cos n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sin n = 0$

Suy ra: $\lim_{n\to+\infty} \left(\sin^2 n + \cos^2 n\right) = 0$ (Vô lí). Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \sin n$, $n \in N^*$ không có giới hạn.

Dạng 4. Tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp: - Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn và có công bội q thoả mãn $|q| < 1$.

- Tổng các số hạng của một cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \frac{u_1}{1-q}$$

- Mọi số thập phân được biểu diễn dưới dạng lỹ thừa của 10

$$X = N, a_1a_2a_3.....a_n... = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

Trong đó N là một số nguyên, $a_1, a_2, a_3...a_n$ là những chử số ($0 \le a_i \le 9$, $i = 1,2..n$)

Bài 9. a) Tính tổng $2 ; -\sqrt{2} ; 1 ; -\frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{1}{2}...$

b) Giải phương trình $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... + (-1)^n x^n + ... = \frac{13}{6}$ với $|x| < 1$

c) Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số hữu tỉ

a = 2,03030303...... (chu kỳ 03).

Giải

a) Dãy số $2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}...$ là một cấp số nhân với công bội

$$q = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ta có: $|q| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ nên dãy số trên là một cấp số nhân lùi vô hạn

$$S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + ... = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}.$$

b) Dãy số $x^2, -x^3, x^4, -x^5, ..., (-1)^n x^n...$ là một cấp số nhân với công bội

$$q = -\frac{x^2}{x} = -x$$

Ta có: $|q| = |-x| = |x| < 1$ nên dãy số trên là một cấp số nhân lùi vô hạn

$$S = x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ... + (-1)^n x^n + ... = \frac{x^2}{1+x}$$

Suy ra:

$$2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\frac{13}{6} \Leftrightarrow 2x+1+\frac{x^2}{1+x}=\frac{13}{6}$$

$$\Leftrightarrow 18x^2+5x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-\dfrac{7}{9} \end{array}\right..$$

c) Ta có: a = 2,03030303......

$$=2+\frac{3}{100}+\frac{3}{100^2}+\frac{3}{100^3}+\ldots+\frac{3}{100^n}+\ldots=2+\frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{100}}=2+\frac{1}{33}=\frac{67}{33}$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=\dfrac{3n+2}{n+1}$

a) Tìm số n sao cho $|u_n-3|<\dfrac{1}{1000}$

b) Chứng minh rằng với mọi n > 999 thì các số hạng của dãy số (u_n) đều nằm trong khoảng (2, 999 ; 3,001).

Bài 2. Dùng định nghĩa giới hạn của dãy số, chứng minh

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}=3$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2}{n+1}=+\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{1-n^3}=-\infty$

Bài 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^4-n^2+1}{(2n+1)(3-n)(n^2+2)}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2n^4+n^2-7}}{2n^2-n+3}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+n+3}{2n^3-1}$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-2}{1+2^n}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$ f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ g) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^n+1}{5^n-1}$

Bài 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ với $|a|<1, |b|<1$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2)$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-2})$

Bài 5. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2.1^2+3.2^2+...+(n+1)n^2}{n^4}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+...+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$

Bài 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+\sin n}{3n+4}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n+3n^2}{\cos n+5n^2}$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin 2n+\cos 2n}{3n+1}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$

Bài 7. a) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}\end{cases}$ nếu n ≥ 1.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}0<u_n<1\\ u_{n+1}(1-u_n)>\dfrac{1}{4}\end{cases}$ nếu n ≥ 1.

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n+\dfrac{2}{u_n})$ và $u_1>0$

a) Chứng minh rằng $u_n\geq\sqrt{2}$ với mọi n ≥ 2.

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 9. a) Tính tổng $S = 1+0,9+(0,9)^2+(0,9)^3+.....+(0,9)^{n-1}+....$

b) Cho $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$, Tính tổng $S = 1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+.....$

c) Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số hữu tỉ

a = 0,27272727........ b = 0,9999999.........

Bài 10. Cho dãy số (u_n) được xác định $u_n = \cos n$, $n \in N^*$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) không có giới hạn.

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các định nghĩa giới hạn hữu hạn

1. Cho khoảng K, $x_0 \in K$ và hàm số f(x) xác định trên K (hoặc $K \setminus \{x_0\}$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in K \setminus \{x_0\}, \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

2. Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a ; b), $x_0 \in (a ; b)$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_0 < x_n < b, \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), a < x_n < x_0, \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

3. Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a ; + ∞) hoặc (- ∞ ; a)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a, \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n < a, \lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$$

2. Định nghĩa giới hạn ± ∞

1.Cho khoảng K, $x_0 \in K$ và hàm số f(x) xác định trên K (hoặc $K \setminus \{x_0\}$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n \in K \setminus \{x_0\}, \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = +\infty$$

2. Cho hàm số f(x) xác định trên khoảng (a ; + ∞)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall (x_n), x_n > a, \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = -\infty$$

Nhận xét: f(x) có giới hạn + ∞ khi và chỉ khi - f(x) có giới hạn - ∞

3. Các giới hạn đặc biệt

1. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ với c là hằng số

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$ với c là hằng số

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$, nếu k là số lẻ và $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = +\infty$, nếu k là số chẵn

4. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1. Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$, khi đó

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = L+M$; $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)-g(x)] = L-M$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = L.M$; $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ với $M \neq 0$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ nếu $f(x) \geq 0$ trong khoảng chứa x_0.

Định lí 2. Cho khoảng K chứa điểm x_0 và ba hàm số h(x), f(x), g(x)

Nếu $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in K \setminus \{x_0\}$

và $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$

Thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

Định lí 3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$

Định lí 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; **Hệ quả:** Nếu $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$

5. Quy tắc về giới hạn ± ∞

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$\pm\infty$	$L > 0$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$L < 0$	$\mp\infty$

* Trường hợp $g(x) > 0$ khi $x \to x_0$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$L \neq 0$	$+\infty$	0
$L > 0$	0	$+\infty$
$L < 0$	0	$-\infty$

* Trường hợp g(x) < 0 khi x → x_0

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$L\neq 0$	$-\infty$	0
$L>0$	0	$-\infty$
$L<0$	0	$+\infty$

6. Các dạng vô định

1. Dạng $\dfrac{0}{0}$, tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$, khi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=0$

2. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$, tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$, khi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=\pm\infty$; $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\pm\infty$

3. Dạng $0.\infty$, tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)v(x)\right]$, khi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=\pm\infty$

4. Dạng $\infty-\infty$, tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)-v(x)\right]$

khi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=+\infty$ Hay $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)=-\infty$

* Khi $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ ta thường gặp các dạng vô định tương tự như trên.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Dùng định nghĩa để tìm giới hạn

Phương pháp:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \forall(x_n), x_n\in K\setminus\{x_0\}, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=L$

2. Để chứng minh hàm số f(x) không có giới hạn khi x→x_0 ta thực hiện :

- Chọn hai dãy số khác nhau (x_n) và (y_n) thoả mãn : x_n, y_n thuộc tập xác định của hàm số và khác x_0

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=x_0$

- Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)\neq\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n)$ hoặc một trong hai giới hạn đó không tồn tại

Bài 1. a) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$

Dùng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$

b) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ 1-x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.

Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số f(x) không có giới hạn khi x→0

c) Cho hàm số $f(x)=\cos\dfrac{1}{x^2}$

Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số f(x) không có giới hạn khi x→0

Giải

a) Hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$ xác định trên tập R \ {1}

Với mọi dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \neq 1$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2x_n^2+x_n-3}{x_n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2(x_n-1)(x_n+\frac{3}{2})}{x_n-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(2x_n+3\right) = 2\lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} 3 = 2.1+3 = 5 \Rightarrow \lim_{x\to1} f(x) = 5$$

b) Hàm số $f(x)=\begin{cases} x & \text{nếu } x < 0 \\ 1-x & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ xác định trên R

* Lấy dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{1}{n}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ (1)

* Lấy dãy số (y_n) với $y_n = -\dfrac{1}{n}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số f(x) không có giới hạn khi x→0

c) Hàm số $f(x)=\cos\dfrac{1}{x^2}$ xác đinh trên K = R\{0}

* Lấy dãy số (x_n) với $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} \in K$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{1}{x_n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n\pi) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ (1)

* Lấy dãy số (y_n) với $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}} \in K$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}} = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{y_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \cos(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \lim_{n\to+\infty} \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số f(x) không có giới hạn khi x→0

Dạng 2. Tìm giới hạn của hàm số bằng công thức

Phương pháp: Để tìm giới hạn của hàm số không thuộc dạng vô định ta thực hiện

1. Nếu f(x) là hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. Áp dụng định lí 1 và các quy tắc về giới hạn ± ∞

Bài 2. Tìm các giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right)$ b) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^3+5x^2+10x-1\right)$ c) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+5}{x+5}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+\sin^6x-5\cos^6x}{1+\sin^4x-\cos^4x}$ e) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+5}{(x+5)^2}$ g) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$

Giải

a) Ta có $f(x)=\sqrt{x^2+5}-1$ xác định tại x = - 2 nên

$$\lim_{x\to-2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right)=\sqrt{(-2)^2+5}-1=2$$

b) Ta có $f(x)=x^3+5x^2+10x-1$ xác định tại x = 0 nên

$$\lim_{x\to0}\left(x^3+5x^2+10x-1\right)=-1$$

c) Ta có $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+5}$ xác định tại x = - 1 nên $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+5}{x+5}=\dfrac{(-1)^2+5}{-1+5}=\dfrac{3}{2}$

d) Ta có $f(x)=\dfrac{1+\sin^6x-5\cos^6x}{1+\sin^4x-\cos^4x}$ xác định tại $x=\dfrac{\pi}{2}$

nên $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin^6x-5\cos^6x}{1+\sin^4x-\cos^4x}=\frac{1+\sin^6\frac{\pi}{2}-5\cos^6\frac{\pi}{2}}{1+\sin^4\frac{\pi}{2}-\cos^4\frac{\pi}{2}}=\frac{1+1-5.0}{1+1-0}=1$$

e) Ta có $\lim\limits_{x\to-5}f(x)=\lim\limits_{x\to-5}(x^2+5)=(-5)^2+5=30>0$

nên $$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+5}{(x+5)^2}=+\infty$$

g) Ta có $\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}(1-x)=1-4=-3<0$ nên $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}=-\infty$

• Dạng 3. Tìm giới hạn của hàm số thuộc dạng vô định $\frac{0}{0}$

Phương pháp:

1. Nhận biết dạng vô định $\frac{0}{0}$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}$ *khi* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=0$

2. Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}\text{ và tính }\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$$

3. Nếu u(x) hay v(x) có chứa biến dưới dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp, sau đó phân tích chúng thành tích để giản ước.

Bài 3. Tìm các giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2+3x+1}{x^4+8x^2-9}$ e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-2x+4}{x^2+2x}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3}{2x+1}=\frac{1+3}{2.1+1}=\frac{4}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2+3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3x+3)=3$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2+3x+1}{x^4+8x^2-9}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-4x-1)}{(x^2-1)(x^2+9)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x-1}{(x+1)(x^2+9)}=-\frac{1}{5}$

e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-2x+4}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+2)}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x+2}{x}=-5$

Bài 4. Tìm các giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ c) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}+2}{x-5}$

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{3x-2}+2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$

Giải

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}$

$$= -\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2} = -\lim_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+7}+3) = -24$$

) $$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5}(\sqrt{x}+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$$

) $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-4}-\sqrt{x+4}+2}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-4}-1)-(\sqrt{x+4}-3)}{x-5}$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{1}{(x-5)}\left[\frac{(\sqrt{x-4}-1)(\sqrt{x-4}+1)}{\sqrt{x-4}+1} - \frac{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)}{\sqrt{x+4}+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{1}{(x-5)}\left[\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1} - \frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}\right] = \lim_{x\to 5}\left[\frac{1}{\sqrt{x-4}+1} - \frac{1}{\sqrt{x+4}+3}\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

) $$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(4x-8)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})} = \frac{9}{8}.$$

) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{3x-2}+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x^2-4)(\sqrt[3]{(3x-2)^2}-2\sqrt[3]{3x-2}+4)}{(\sqrt[3]{3x-2}+2)(\sqrt[3]{(3x-2)^2}-2\sqrt[3]{3x-2}+4)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt[3]{(3x-2)^2}-2\sqrt[3]{3x-2}+4)}{3(x+2)}$$

$$= -\frac{4}{3}\lim_{x\to -2}\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2}-2\sqrt[3]{3x-2}+4\right) = -16.$$

f) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{1+x}-1+1-\sqrt[3]{1+x}}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{(1-\sqrt[3]{1+x})\left(1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right)}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{x}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

Dạng 4. Tìm giới hạn của các hàm lượng giác (dạng vô định $\frac{0}{0}$)

Phương pháp: Vận dụng các công thức lượng giác để biến đổi hàm lượng giác thành dạng có thể sử dụng được định lí:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x\to 0}u(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1 \quad ;\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{\sin u(x)}=1$$

Bài 5. Tìm các giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 11x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 12x-\cos 10x}{\cos 8x-\cos 6x}$

Giải

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{4\cos x}=2.1.1.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x-\sin 2x}{2\sin^2 x+\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x(\sin x-\cos x)}{2\sin x(\sin x+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin 0-\cos 0}{\sin 0+\cos 0}=-1$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x\cos^2 x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x\cos^2 x}{x}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\cos^2 x=4.1.1=4$$

d) Xét hàm số $f(x)=\frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$, đặt $x=\frac{\pi}{3}-t$

$$f(x) = f(\frac{\pi}{3}-t) = \frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{3}-t\right)}{1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right)} = \frac{\sin\left(\pi-3t\right)}{1-2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t+\sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)}$$

$$= \frac{\sin 3t}{1-\cos t-\sqrt{3}\sin t} = \frac{\sin 3t}{2\sin^2\frac{t}{2}-2\sqrt{3}\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{\sin 3t}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{1 - 2\cos x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{6t}{2}\frac{\sin 3t}{3t}}{2\sin\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)}$$

$$= 3\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}}{\lim\limits_{t\to 0}\left(\sin\frac{t}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}\right)} = 3.1.\frac{1}{\left(0-\sqrt{3}\right)} = -\sqrt{3}$$

) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 11x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x+\cos 5x-\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 11x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}+\cos 5x\left(1-\cos 7x\right)}{\sin^2 11x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}+2\cos 5x\sin^2\frac{7x}{2}}{\sin^2 11x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{25}{4}\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}+\cos 5x\frac{\frac{49}{4}\sin^2\frac{7x}{2}}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2}}{11^2.\frac{\sin^2 11x}{(11x)^2}}$$

$$= 2\frac{\frac{25}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}+\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x\frac{49}{4}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{7x}{2}}{\left(\frac{7x}{2}\right)^2}}{11^2.\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 11x}{(11x)^2}} = 2\frac{\frac{25}{4}+\frac{49}{4}}{11^2} = \frac{37}{121}$$

) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 12x-\cos 10x}{\cos 8x-\cos 6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 11x.\sin x}{-2\sin 7x.\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 11x}{\sin 7x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{11\sin 11x}{11x}}{\dfrac{7\sin 7x}{7x}} = \frac{11\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x}{11x}}{7\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}} = \frac{11}{7}$$

Dạng 5. Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Phương pháp:

1. Nhận biết dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}\ khi\ \lim_{x\to x_0}u(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{u(x)}{v(x)}\ khi\ \lim_{x\to\pm\infty}u(x)=\pm\infty,\ \lim_{x\to\pm\infty}v(x)=\pm\infty$$

2. Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ cao nhất của biến x (Hoặc phân tích thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước)

3. Nếu u(x) hoặc v(x) có chứa biến x trong dấu căn thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ cao nhất của biến x trong dấu căn), sau đó chia tử và mẫu cho luỹ thừa cao nhất của x.

Bài 6. Tìm các giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(3x^2+1)(5x+3)}{(2x^3-1)(x+1)}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-7x^2+x+5}{3|x|-13}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to-1}\left[\dfrac{\dfrac{1}{x+1}+3}{\dfrac{2x-3}{x^2+3x+2}}\right]$

Giải

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x-4}{-x^3-x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{-1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{2}{-1}=-2$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(3x^2+1)(5x+3)}{(2x^3-1)(x+1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)x\left(5+\dfrac{3}{x}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{1}{x^3}\right)x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(5+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(2-\dfrac{1}{x^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(5+\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x^3}\right).\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0.\frac{3.5}{2.1} = 0$$

c)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-7x^2+x+5}{3|x|-13} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(1-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(-\frac{3}{x^3}-\frac{13}{x^5}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{7}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4}}{-\frac{3}{x^3}-\frac{13}{x^5}} = +\infty$$

d) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2x+3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x-1}$$

**Khi* $x\to+\infty$: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}} = \frac{1+3}{2-1} = 4$$

**Khi* $x\to-\infty$: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x-1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+3}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}} = \frac{-1+3}{-2-1} = -\frac{2}{3}$$

f)

$$\lim_{x \to -1}\left[\frac{\frac{1}{x+1}+3}{\frac{2x-3}{x^2+3x+2}}\right] = \lim_{x \to -1}\left[\frac{(3x+4)(x^2+3x+2)}{(x+1)(2x-3)}\right] = \lim_{x \to -1}\frac{(3x+4)(x+2)}{2x-3} = -\frac{1}{5}$$

Dạng 6. Dạng vô định $\infty - \infty ; 0.\infty$

Phương pháp:

1. Nếu biểu thức chứa biến số **dưới dấu căn thì nhân và chia với biểu thức** liên hợp.

2. Nếu biểu thức chứa **nhiều phân thức thì quy đồng mẫu và đưa về** cùng một phân thức.

3. Thông thường, các phép **biến đổi này có thể cho ta khử ngay dạng vô** định $\infty - \infty ; 0.\infty$ hoặc chuyển **về dạng vô định** $\frac{\infty}{\infty} ; \frac{0}{0}$

Bài 7. Tìm các giới hạn của **các hàm số sau**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)$

c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(2x-3-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1^+}\left(x^3-1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$

e) $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$

Giải

a) $$\lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1}-1\right) = \lim_{x \to 0}\frac{-x}{x(x+1)} = -\lim_{x \to 0}\frac{1}{x+1} = -1$$

b) $$\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right) = \lim_{x \to -\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty}\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}-2x} = \lim_{x \to -\infty}\frac{-x}{-x\left(\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2\right)} = \lim_{x \to -\infty}\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2} = \frac{1}{4}$$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x-3-\sqrt{4x^2-4x-3})$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-3-\sqrt{4x^2-4x-3})(2x-3+\sqrt{4x^2-4x-3})}{(2x-3+\sqrt{4x^2-4x-3})}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-8x+12}{2x-3+\sqrt{4x^2-4x-3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-8x+12}{2x-3+|x|\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

* Khi x → + ∞ thì

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-3-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x+12}{2x-3+|x|\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x+12}{2x-3+x\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8+\frac{12}{x}}{2-\frac{3}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}}=\frac{-8}{2+2}=-2$$

* Khi x → - ∞ thì

$$\lim_{x\to-\infty}(2x-3-\sqrt{4x^2-4x-3})=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x+12}{2x-3+|x|\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x+12}{2x-3-x\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8+\frac{12}{x}}{2-\frac{3}{x}-\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}}=-\infty$$

)

$$\lim_{x\to1^+}\left(x^3-1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x^3-1)}{x^2-1}\sqrt{x(x^2-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x^2+x+1)}{x+1}\sqrt{x(x^2-1)}=0$$

) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}{(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

* Khi x → + ∞ thì

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{5}{2}$$

*** Khi x → - ∞ thì**

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-4}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}}=-$$

$$f)\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x+x-\sqrt[3]{x^3-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}\right)=0+0=0$$

Dạng 7. Giới hạn kẹp

Phương pháp: h(x) ≤ f(x) ≤ g(x), ∀ x ∈ K \ {x_0}, x_0 ∈ K

và $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$

Bài 8. Tìm giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sin^2 x-5\cos 2x}{x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\dfrac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}\cos(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

Giải

a) Ta có: $\sin^2x - 5\cos2x = \sin^2x - 5(1 - 2\sin^2x) = 11\sin^2x - 5$

$0 \le \sin^2x \le 1,\ x \in R \Rightarrow -5 \le 11\sin^2x - 5 \le 11 - 5 \Leftrightarrow -5 \le 11\sin^2x - 5 \le 6$

$$\frac{2x-5}{x^2+3} \le \frac{2x+\sin^2 x-5\cos 2x}{x^2+3} \le \frac{2x+6}{x^2+3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x^2+3} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin^2 x-5\cos 2x}{x^2+3} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+6}{x^2+3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=0;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+6}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+\sin^2 x-5\cos 2x}{x^2+3}=0$$

) Ta có: $-1\le\cos\frac{1}{x}\le 1,\ x\in R\setminus\{0\} \Rightarrow -x^2\le x^2\cos\frac{1}{x}\le x^2,\ x\in R\setminus\{0\}$

$\lim_{x\to0} -x^2 \le \lim_{x\to0} x^2\cos\frac{1}{x} \le \lim_{x\to0} x^2$ mà

$$\lim_{x\to0} -x^2 = \lim_{x\to0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0} x^2\cos\frac{1}{x}=0$$

$$-1\le\cos(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\le 1, \forall x\in R$$

) Ta có:

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x} \le \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}\cos(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) \le \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}$$

$\in R^+\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$

$$-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x} \le \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}\cos(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) \le \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}$$

$$-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x^2}}}{1}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{x}\cos(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})=0$$

ạng 8. Giới hạn một bên

hương pháp:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow \forall(x_n), x_0<x_n<b, \lim_{n\to+\infty}x_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}f(x_n)=L$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n), a < x_n < x_0, \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

Bài 9. a) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{nếu } x < 3 \\ 1 & \text{nếu } x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$$

Tính $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

b) Cho hàm số $f(x) = 1 + |2x - 6|$, tính $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Giải

a) * $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \left(3 - 2x^2\right) = 3 - 2.3^2 = -15$

* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \left(x^2 - 2x + 3\right) = 3^2 - 2.3 + 3 = 6$

* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ nên hàm số không có giới hạn khi x → 3

b) Ta có : $|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -2x + 6 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$ nên $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -2x + 7 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$

* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (2x - 5) = 2.3 - 5 = 1$

* $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (-2x + 7) = -2.3 + 7 = 1$

* $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3 - 1} & \text{nếu } x > 1 \\ mx + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$

Tìm giá trị của m để hàm số f(x) có giới hạn khi **x → 1**. Tính giới hạn đó

Giải

* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3 - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 - 1}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2 + x + 1\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x^2 + x + 1} = 1$$

* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(mx+2\right) = m+2$

Hàm số f(x) có giới hạn thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow 1 = m+2 \Leftrightarrow m=-1$

* Khi đó: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$

C. BÀI TẬP.

Bài 1. Dùng định nghĩa chứng minh các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = -6$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+3}{3-x} = -4$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = +\infty$

Bài 2. a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \ge 0 \\ x^2-1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ chứng minh rằng hàm số không có giới hạn khi x →0.

b) Cho hàm số $f(x) = \sin\dfrac{1}{x^2}$, chứng minh rằng hàm số không có giới hạn khi x →0.

Bài 3. Tìm giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to -2} (2x^2-x+4)$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{4x^2-x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2}{x^3-x-2}$ d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^3+15}{(x+2)^2}$

Bài 4. Tìm giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{5-x^2}}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-1}$

Bài 5. Tìm giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\sin 2x} - \cot x\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2x}{\tan(x-1)}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[\tan 2x.\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{98}{83}\left(\frac{1-\cos 3x\cos 5x\cos 7x}{\sin^2 7x}\right)\right]$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^4 x-\sin^4 x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Bài 6. Tìm giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-2x+3x^3}{x^3-9}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$ d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{9x^2+x+1}-\sqrt{4x^2+2x+1}}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-7x^2+x+5}{3|x|-13}$ f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{\sqrt[3]{x^3-x+1}}$

Bài 7. Tìm giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1})$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3})$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x^2-x})$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

Bài 8. Tìm giới hạn của các hàm số sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+5\cos x}{x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\sin x}{2x^2+1}$ d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sin 2x+2\cos 2x}{x^2+x+1}$

Bài 9. a) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{nếu } x>1\\ x^2+x+1 & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$

tính $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

b) Cho hàm số $f(x)=\frac{5-x}{|x-5|}$, tính $\lim\limits_{x\to 5^+}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 5^-}f(x)$; $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$

Bài 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} & \text{nếu } x<1\\ mx+2 & \text{nếu } x\ge 1\end{cases}$ Với giá trị nào của m thì hàm số f(x) có giới hạn khi x → 1.

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

. KIẾN THỨC CƠ BẢN

. Các định nghĩa.

. Cho hàm số f(x) xác định trong khoảng (a ; b)

Hàm số f(x) liên tục tại điểm $x_0 \in (a ; b) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

. Hàm số f(x) liên tục trên (a ; b) $\Leftrightarrow$ f(x) liên tục tại mọi điểm $x \in (a ; b)$

. Hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a ; b] $\Leftrightarrow$ f(x) liên tục trên khoảng (a ; b)

à $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

. Hàm số f(x) không liên tục tại điểm x_0 thì x_0 gọi là điểm gián đoạn của àm số f(x)

I. Các định lí.

Định lí 1. a) Các hàm đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thức R

b) Các hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng

Định lí 2. Giả sử f(x) và g(x) là hai hàm số liên tục trên khoảng K, khi đó

a) Các hàm số f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x) cũng liên tục trên khoảng K.

b) Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục trên khoảng K nếu $g(x) \neq 0$, $\forall x \in K$.

c) Hàm số $\sqrt{f(x)}$ liên tục trên khoảng K nếu $f(x) \geq 0$, $\forall x \in K$.

Định lí 3. Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a ; b] và f(a).f(b) < 0 thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a ; b)$ sao cho f(c) = 0

. CÁC DẠNG TOÁN

ạng 1. Xét tính liên tục của hàm số f(x) tại điểm x_0

hương pháp: 1. Tính $f(x_0)$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

3. Hàm số f(x) liên tục tại điểm x_0

ài 1.a) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm = 1.

b) Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x-\sin 3x}{x} & \text{nếu } x>0\\ x^2-2x+2 & \text{nếu } x\le 0\end{cases}$ tại điểm x = 0.

Giải

a) Ta có: f(1) = 1

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{x+1}=-1\neq f(1).$$

Vậy hàm số không liên tục tại điểm x = 1.

b) Ta có: f(0) = 2

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{5x-\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(5-3.\frac{\sin 3x}{3x}\right)=5-3=2=f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x^2-2x+2\right)=2=f(0).$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm x = 0

Bài 2. a) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ m^2x & \text{nếu } x=1\end{cases}$

Tìm m để hàm số liên tục tại điểm x = 1.

b) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2 & \text{nếu } x\le 2\\ 3 & \text{nếu } x>2\end{cases}$

Tìm a để hàm số liên tục tại điểm x = 2.

Giải

a) Ta có f(1) = m^2

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{4}$$

Để hàm số liên tục tại điểm x = 1 thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow m^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$

b) Ta có f(2) = 4a

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} 3=3 \quad \text{và} \quad \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(ax^2\right)=4a$$

Để hàm số liên tục tại điểm x = 2 thì

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Rightarrow 4a=3\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$$

Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số f(x) trên một khoảng (một đoạn)

Phương pháp:

1. Áp dụng định lí 1, định lí 2 để xét tính liên tục của hàm số trên từng khoảng xác định của nó

2. Nếu hàm số xác định bởi 2 hoặc 3 công thức, ta thường xét tính liên tục tại các điểm đặc biệt của hàm số đó.

Bài 3. a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 4 & \text{nếu } x \geq 2 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{nếu } -7 < x < 2 \end{cases}$

Chứng minh rằng hàm số liên tục trên khoảng (- 7 ; + ∞)

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 3 \\ ax+b & \text{nếu } 3 \leq x \leq 5 \\ 3 & \text{nếu } x > 5 \end{cases}$

Tìm a và b để hàm số liên tục, vẽ đồ thị của hàm số

Giải

a) * Khi $x > 2$ thì $f(x) = x^2 - x + 4$ là hàm liên tục trên khoảng (2 ; + ∞)

* Khi $-7 < x < 2$ thì $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

Hàm số y = x - 2 là đa thức nên nó liên tục trên khoảng (- 7 ; 2)

Hàm số y = x + 7 là đa thức nên nó liên tục trên khoảng (- 7 ; 2) suy ra hàm số

$y = \sqrt{x+7}$ liên tục trên khoảng (- 7 ; 2) và hàm số $y = \sqrt{x+7} - 3$ liên tục trên khoảng (- 7 ; 2)

Mặt khác $\sqrt{x+7} - 3 \neq 0, \forall x \in (-7\,;2)$

Vậy, hàm số $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$ liên tục trên khoảng (- 7 ; 2)

* Khi x = 2 thì f(2) = 6

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(x^2 - x + 4\right) = 6$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \left(\sqrt{x+7}+3\right) = 6$$

Suy ra : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 6$, hàm số f(x) liên tục tại điểm x = 2

Kết luận: Hàm số f(x) liên tục trên khoảng (- 7 ; + ∞)

b) * Khi $x < 3$ thì $f(x) = 1$ là hàm hằng nên nó liên tục trên khoảng $(-\infty ; 3)$

* Khi $3 < x < 5$ thì $f(x) = ax + b$ là đa thức nên nó liên tục trên khoảng $(3 ; 5)$

* Khi $x > 5$ thì $f(x) = 3$ là hàm hằng nên nó liên tục trên khoảng $(5 ; \infty)$

* Khi $x = 3$ thì $f(3) = 3a + b$ và

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (ax+b) = 3a+b; \ \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 1 = 1$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x = 3$ thì $3a + b = 1$ (1)

* Khi $x = 5$ thì $f(5) = 5a + b$ và

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (ax+b) = 5a+b; \ \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} 3 = 3$$

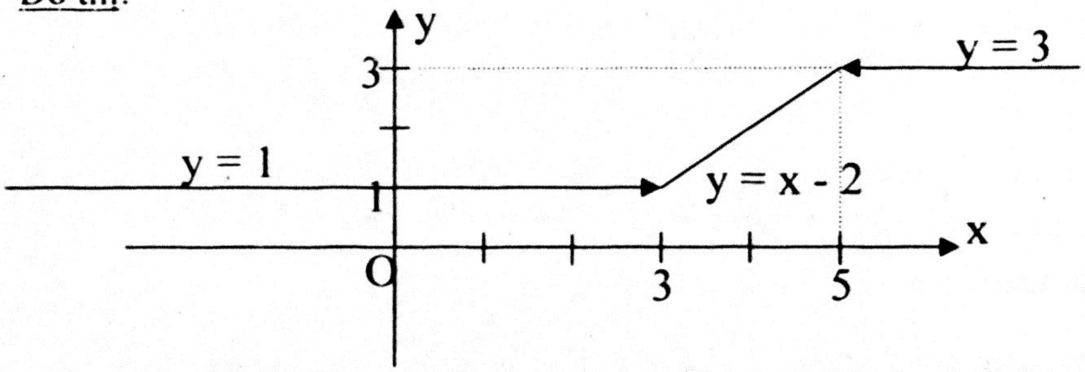
Để hàm số liên tục tại điểm $x = 5$ thì $5a + b = 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} 3a+b=1 \\ 5a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$

Vậy khi $a = 1$ và $b = -2$ thì hàm số liên tục trên R

Khi đó ta có: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 3 \\ x - 2 & \text{nếu } 3 \le x \le 5 \\ 3 & \text{nếu } x > 5 \end{cases}$

Đồ thị:



Dạng 3. Tìm điểm gián đoạn của hàm số f(x)

Phương pháp: x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$ nếu tại điểm x_0 hàm số không liên tục. Thông thường x_0 thỏa mãn một trong các trường hợp sau:

1. $f(x)$ không tồn tại

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ không tồn tại

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \ne f(x_0)$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)} & \text{nếu } x\,(x-3)\neq 0\\ a & \text{nếu } x=0\\ b & \text{nếu } x=3\end{cases}$

với a và b là hai tham số. Tìm các điểm gián đoạn của hàm số.

Giải

TXĐ: R nên ta chỉ xét sự gián đoạn của hàm số tại các điểm x = 0 và x = 3

* Tại $x=0$, ta có $f(0)=a$ và $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x-6}{x(x-3)}=+\infty$, vậy x = 0 là điểm gián đoạn của hàm số.

* Tại x = 3, ta có $f(3)=b$ và

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x}=\frac{5}{3}$$

Vậy, Khi $b\neq\dfrac{5}{3}$ và với mọi a thì điểm gián đoạn của hàm số là x = 0; x = 3

Khi $b=\dfrac{5}{3}$ và với mọi a thì điểm gián đoạn của hàm số là x = 0

Dạng 4. Chứng minh phương trình f(x) = 0 có nghiệm

Phương pháp:

1. Chứng minh phương trình f (x) = 0 có ít nhất một nghiệm
   - Tìm hai số a và b sao cho f (a).f(b) < 0.
   - Hàm số f (x) liên tục trên đoạn [a ; b].
   - Phương trình f (x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a\,;b)$
2. Chứng minh phương trình f (x) = 0 có ít nhất k nghiệm
   - Tìm k cặp số a_i, b_i sao cho các khoảng $(a_i\,,b_i)$ rời nhau và $f(a_i).f(b_i) < 0$, i = 1,...k
   - Phương trình f (x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_i \in (a_i\,;b_i)$
3. Khi phương trình f (x) = 0 có chứa tham số thì cần chọn a, b sao cho :
   - f (a), f(b) không còn chứa tham số hoặc còn chứa tham số nhưng dấu không đổi.
   - Hoặc f (a), f(b) còn chứa tham số nhưng tích f (a).f(b) luôn âm

Bài 5. a) Chứng minh rằng phương trình $2x^3-10x-7=0$ có ít nhất hai nghiệm

b) Chứng minh rằng phương trình $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi m

c) Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=a$ luôn có nghiệm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ với mọi a

d) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất x_0 thoả mản

$$0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 10x - 7$, ta có $f(-1) = 1$; $f(0) = -7$; $f(3) = 17$ nên $f(-1).f(0) = -7 < 0$ và $f(0).f(3) = -119 < 0$
Mặt khác :$f(x) = 2x^3 - 0x - 7$ là hàm đa thức nên liên tục trên $[-1 ; 0]$ và $[0 ; 3]$
Suy ra, phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (-1 ; 0)$ và $x_1 \in (0 ; 3)$
Vậy, phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất hai nghiệm

b) Xét hàm số $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$, ta có $f(0) = -1$ và $f(-1) = m^2 + 1$
Nên $f(0)\,f(-1) = -(m^2 + 1) < 0, \forall m \in R$
Mặt khác : $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $[-1 ; 0]$
Suy ra, phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (-1 ; 0)$. Vậy, phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

c) Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}-a$ liên tục trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}-a\right)=-\infty$ nên tồn tại x_1 gần $\frac{\pi}{2}$ để $f(x_1) < 0$

$\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}-a\right)=+\infty$ nên tồn tại x_2 gần π để $f(x_2) > 0$

Suy ra: $f(x_1)\,f(x_2) < 0$

nên phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

d) Xét hàm số $f(x) = x^3 + x - 1$, ta có : $f(0) = -1$ và $f(1) = 1$ nên $f(0)\,f(1) < 0$
Mặt khác : $f(x) = x^3 + x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $[0 ; 1]$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1^3+x_1-1)-(x_2^3+x_2-1)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1)}{x_1-x_2}$$

$$=x_1^2+x_1x_2+x_2^2+1=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3x_2^2}{4}+1>0$$

với mọi x_1, x_2 thuộc R

Suy ra: $f(x) = x^3 + x - 1$ đồng biến trên R nên phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0 ; 1)$

Theo bất đẳng thức Cô Si :

$$1 = x_0^3 + x_0 > 2\sqrt{x_0^4} \Rightarrow 1 > 2x_0^2 \Rightarrow x_0^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ài 6. a) Cho ba số thực a, b, c thoả mãn $a < b < c$

Chứng minh phương trình $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ uôn có hai nghiệm phân biệt.

b) Cho phương trình $a x^2 + b x + c = 0$ $(a \neq 0)$ thoả mãn $2a + 6b + 19c = 0$.

hứng minh phương trình có nghiệm trong $[\,0 ; \frac{1}{3}\,]$

c) Cho phương trình $a x^2 + b x + c = 0$ thoả mãn $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$

với $m > 0$)

Chứng minh phương trình có nghiệm trong $(0 ; 1)$.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = (x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$ là tam thức bậc hai có hệ số $A = 3$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

$f(a) = (a - a)(a - b) + (a - b)(a - c) + (a - c)(a - a) = (a - b)(a - c) > 0$

$f(b) = (b - a)(b - b) + (b - b)(b - c) + (b - c)(b - a) = (b - c)(b - a) < 0$

$f(c) = (c - a)(c - b) + (c - b)(c - c) + (c - c)(c - a) = (c - a)(c - b) > 0$

Vậy $f(a)\,f(b) < 0$ và $f(b)\,f(c) < 0$

Mặt khác f(x) là hàm đa thức nên nó liên tục trên $[\,a ; b\,]$ và $[b ; c\,]$

Suy ra, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_1 \in (a ; b)$ và $x_2 \in (b ; c)$.

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

) Xét hàm số $f(x) = a x^2 + b x + c$ $(a \neq 0)$ liên tục trên R

$$f(0) = c,\ f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}(a + 3b + 9c)$$

$$f(0) + 18\, f(\frac{1}{3}) = c + 2\,(a + 3b + 9\,c) = 2a + 6b + 19c = 0.$$

Suy ra $f(0)$, $f(\frac{1}{3})$ trái dấu hoặc $f(0) = f(\frac{1}{3}) = 0$.

Vậy phương trình $a x^2 + b x + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm trong $[\,0 ; \frac{1}{3}]$

ách khác: $f(0) = c$ và $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}(a + 3b + 9c)$ nên

$$2f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}(2a + 6b + 19c) = \frac{1}{9}(-c)$$

$$f(0)\,f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{18}c^2 \le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(0)f\left(\dfrac{1}{3}\right) < 0 \\ f(0) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình $a x^2 + b x + c = 0$ có nghiệm trong $[\,0\,;\frac{1}{3}\,]$.

c) Xét hàm số $f(x) = a x^2 + b x + c$ liên tục trên R

+ Khi $c = 0$, ta có : $a x^2 + b x = 0$

* Nếu $a = 0$ thì từ giả thiết $\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0$ suy ra $b = 0$, phương trình có vô số nghiệm nên phương trình có nghiệm trong khoảng $(0\,;\,1)$

* Nếu $a \ne 0$, ta có : $a x^2 + b x = 0 \Leftrightarrow x\,(ax + b) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} = \dfrac{m+1}{m+2} \in (0\,;\,1) \end{array}\right.$$

+ Khi $c \ne 0$, ta có $f(0) = c$ và

$$f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = a\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2 + b\left(\frac{m+1}{m+2}\right) + c = \frac{(m+1)^2}{m+2}\left[\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1}\right] + c = \frac{-c}{m(m+2}$$

$$f(0)f\left(\frac{m+1}{m+2}\right) = \frac{-c^2}{m(m+2)} < 0$$

Suy ra, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $\left(0;\dfrac{m+1}{m+2}\right) \subset (0;1)$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[\,a\,;\,b\,]$. Chứng minh rằng với mọi dãy hữu hạn các số c_1, c_2, c_3,......, c_n cùng thuộc đoạn $[\,a\,;\,b\,]$ phương trình : $$f(x) = \frac{1}{n}\left[f(c_1) + f(c_2) + f(c_3) + \ldots + f(c_n)\right]$$
luôn có nghiệm trong đoạn $[\,a\,;\,b\,]$.

Giải

Ta có: $a \le c_1 \le b\,;\, a \le c_2 \le b\,;\, a \le c_3 \le b\,;\quad \ldots.\, a \le c_n \qquad ;$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[\,a\,;\,b\,]$

$$f(a) \le f(c_1) \le f(b)$$

$$f(a) \le f(c_2) \le f(b)$$

Nên : $f(a) \le f(c_3) \le f(b)$

....

$$f(a) \le f(c_n) \le f(b)$$

$$nf(a) \le f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\ldots+f(c_n) \le nf(b)$$

suy ra:

$$\Leftrightarrow f(a) \le \frac{1}{n}\left[f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\ldots+f(c_n)\right] \le f(b)$$

Đặt M = $M = \frac{1}{n}\left[f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\ldots+f(c_n)\right]$

Xét hàm g (x) = f(x) - M liên tục trên đoạn [a ; b]

g (a) = f(a) - M ≤ 0 và g (b) = f(b) - M ≥ 0. Suy ra : g (a) g (b) ≤ 0

* Khi g(a)g(b) = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(a)=0 \\ g(b)=0 \end{array}\right.$ nên a hoặc b là nghiệm của phương trình f (x) = M

* Khi g(a)g(b)< 0 thì phương trình f(x)-M = 0 có ít nhất một nghiệm trong (a ; b)

Vậy, phương trình : $f(x)=\frac{1}{n}\left[f(c_1)+f(c_2)+f(c_3)+\ldots+f(c_n)\right]$ luôn có nghiệm trong đoạn [a ; b].

C. BÀI TẬP

Bài 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{nếu } x \ne 1 \\ 4 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \ne 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 1+x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{nếu } x \ne 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{nếu } |x|<2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2 \\ 3x-1 & \text{nếu } |x|>2 \end{cases}$

Bài 2. a) Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x > 2 \\ ax+\dfrac{1}{4} & \text{nếu } x \le 2 \end{cases}$ liên tục trên R

b) Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{nếu } x \ne 2 \\ m+1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại x = 2

Bài 3. Tìm các điểm gián đoạn của các hàm số

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{nếu } x \neq 0 \\ -2 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8} & \text{nếu } x \neq 8 \\ 0 & \text{nếu } x = 8 \end{cases}$.

Bài 4. Tìm các giá trị của a và b để hàm số $f(x)=\begin{cases} ax-b & \text{nếu } x \leq 1 \\ 3x & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ bx^2-a & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

liên tục tại điểm x = 1 và gián đoạn tại x = 2.

Bài 5.

a) Chứng minh phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ba nghiệm trên khoản (- 2 ; 2).

b) Chứng minh phương trình $x^5 - x - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 > \sqrt[3]{2}$

c) Chứng minh phương trình $x^4 - x - 3 = 0$ có nghiệm $x_0 \in (1\ ;\ 2)$ v $x_0 > \sqrt[7]{12}$

Bài 6. a) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thoả mãn $2a + 3b + 6c = 0$ Chứng minh phương trình có nghiệm trong khoảng (0 ; 1).

b) Cho phương trình $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ thoả mãn $2a + 3b + 6c = 0$ Chứng minh phương trình có ít nhất một nghiệm trong khoản $\left(k\pi\,;\,\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right), k \in Z$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hình vuông có cạnh bằng a (đơn vị). Nối trung điểm các cạnh cu hình vuông đầu ta được hình vuông thứ hai nội tiếp hình vuông đầu ; Lại nố trung điểm các cạnh hình vuông thứ hai ta được hình vuông thứ ba nội tiế hình vuông thứ hai. Cứ tiếp tục như thế... Hãy tính tổng diện tích các hìn vuông đó.

Bài 2. Cho một tam giác đều ngoại tiếp một hình tròn bán kính bằng 1 đơ vị. Tiếp theo, ở các góc nội tiếp vô hạn lần các hình tròn tiếp xúc với ha cạnh của một tam giác và một hình tròn đã vẽ ở bước trước. Tính tỉ lệ phầ trăm tổng diện tích của các hình tròn đã chiếm trong cả tam giác đó.

Bài 3. Xác định thời gian trong khoảng từ 1 giờ đến 2 giờ, kim phút trùng với kim giờ trên mặt đồng hồ.

Bài 4. Tìm giới hạn của các dãy số sau.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-3)^n + 2.5^n}{1-5^n}$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-n+1}$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2+2n+1} - \sqrt{n^2+n-1})$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^2\right]$; e) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[3+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right]$;

f) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n} + \dfrac{\cos n}{3^n}\right)$

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(7+\dfrac{\sin 3n}{2^n}\right)$; h) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\dfrac{n^2+n}{2n^2} + \dfrac{(-1)^n 5^n}{7^n}\right]$

Bài 5. a) Cho $S_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^8 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

b) Cho $S_n = \tan\alpha + \dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{\alpha}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{\alpha}{2^n}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Bài 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2}, n \geq 1 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) bị chặn bởi 0 và $\sqrt{3}$

b) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn : Tính giới hạn đó.

Bài 7. Tìm giới hạn của các hàm số sau.

a) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x^2-2x}{x+2}$; b) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{6x-2}-4}$; c) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{2x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x})$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{4x^2-x+1}}{1-2x}$; f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^4+5x-1}{1-x^2+x^4}$; g) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x^2+9x+20}{x^2+4x}$;

h) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$

Bài 8. Tìm giới hạn của các hàm số sau.

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-x}{x^2-5x+4}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+21} - x)$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$

e) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|}$; f) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{4-\sqrt{x^2+16}}$; g) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x\cos 3x\cos 4x}{x^2}$;

f) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2+3}-2}$

Bài 9. Xét tính liên tục của các hàm số sau

$$\text{a) } f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2-x} & \text{nếu } x^2-x\neq 0\\ -1 & \text{nếu } x=0\\ 3 & \text{nếu } x=1\end{cases}$$

$$\text{b) } f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^2-1)(x+2)}{x^2+x-2} & \text{nếu } x^2+x-2\neq 0\\ -1 & \text{nếu } x=-2\\ 2 & \text{nếu } x=1\end{cases}$$

$$\text{c) } f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+4}{x^3+1} & \text{nếu } x\neq -1\\ 1 & \text{nếu } x=-1\end{cases} \qquad \text{d) } f(x)=\frac{(x-1)|x|}{x}$$

Bài 10. Cho hai hàm số y = f(x) và y = g(x) liên tục trên đoạn [0 ; 1] và **f (0) = f(1).** Chứng minh rằng phương trình $f(x) - f(x + \frac{1}{2}) = 0$ luôn có **nghiệm trong** [0 ; $\frac{1}{2}$].

Bài 11.

a) Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 15x + 1 = 0$ có ít nhất một **nghiệm dương** nhỏ hơn 1.

b) Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 1000x^2 + 2x - 10 = 0$ có ít nhất **một nghiệm** dương nhỏ hơn 0,1.

c) Chứng minh rằng với mọi số thực m ∈ (2 ; 34), phương trình $\mathbf{x^3 + 3x} - 2 = m$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (1 ; 3).

d) Chứng minh rằng phương trình $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ luôn có nghiệm

e) Chứng minh rằng phương trình $2\cos x + (m + 1)\sin x - 1 = 0$ **luôn có** nghiệm trong khoảng (- 1 ; 4)

Bài 12. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng **phân số**

a) 0, 2111..... ; c) 0, 3171717....

b) 0, 8777.... ; d) 0, 414141......

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Định nghĩa : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ được diễn tả như sau :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$$

Câu nào sau đây đúng ?

(A). ε là hằng số vô cùng nhỏ (B). ε là hằng số dương vô **cùng nhỏ**

(C). n_0 là số tự nhiên cho trước. (D). ε là hằng số dương **bất kỳ**

(E). n_0 là số tự nhiên vô cùng bé

2. Định nghĩa : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ được diễn tả như sau :

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow u_n > M$$

Trong định nghĩa trên có bao nhiêu điểm sai ?

(A). 1 ; (B). 2 ; (C). 3 ; (D) 4 ; (E) **Không sai**

3. Cho hàm số y = f(x) xác định trên (a ; + ∞)

Mệnh đề: $\forall (x_n), x_n > a, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$

Là định nghĩa của giới hạn nào sau đây?

(A) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$; (B) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$; (C) $\lim\limits_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x) = l}$;

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$; (E) Không phải bốn câu trên

4. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l_1$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l_2$ thì câu nào sau đây là **đúng** ?

(A) $l_1 = l_2$; (B) $l_1 > l_2$; (C) $l_1 < l_2$; (D) $l_1 = -l_2$;

(E) Không câu nào đúng

5. Nếu hàm số y = f(x) có giới hạn hữu hạn khi x → x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0^+} \boldsymbol{f(x) = l_1}$,

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l_2$ thì câu nào sau đây là đúng ?

(A) $l_1 = l_2$; (B) $l_1 > l_2$; (C) $l_1 < l_2$; (D) $l_1 = -l_2$;

(E) Không câu nào đúng.

. Cho hai hàm số f(x), g(x) cùng xác định trong khoảng K và $\mathbf{x_0 \in K}$. **Giả** sử f(x), g(x) có giới hạn hữu hạn khi x → x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} \boldsymbol{f(x) = L}$;

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$.

Xét các mệnh đề sau: (I) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$

(II) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$

(III) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(IV) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = L.M$

Mệnh đề nào sai?

(A) Chỉ (I) và (II) ; (B) Chỉ (II) và (III) ; (C) Chỉ (III) và (IV) ;
(D) Chỉ (I) và (IV) ; (E) Cả bốn mệnh đề

7. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì câu nào sau đây đúng ?

(A) $f(x_0) = L$; (B) $f(x_0) > L$; (C) $f(x_0) < L$;
(D) $f(x_0) = L + \varepsilon$; (E) Không phải bốn câu trên

8. Giả sử hàm số f(x) liên tục tại x_0 và $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$; $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$
Câu nào sau đây đúng?

(A) $L_1 = L_2 = f(x_0)$; (B) $L_1 = L_2 \neq f(x_0)$;
(C) $f(x_0) = L_1 \neq L_2$; (D) $f(x_0) = L_2 \neq L_1$

9. Giả sử hàm số f(x) liên tục trên [a ; b) và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_1$; $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_2$
Câu nào sau đây đúng?

(A) $L_1 = L_2 = f(a)$; (B) $L_1 = L_2 \neq f(a)$;
(C) $f(a) = L_1 \neq L_2$; (D) $f(a) = L_2 \neq L_1$

10. Giả sử $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x-a)}{x-b} = 1$ thì câu nào sau đây đúng?

(A) a = - b ; (B) a = b ; (C) a > b ;
(D) a < b ; (E) Không câu nào đúng

*** Chọn câu đúng trong các bài tập sau**

11. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n - n^3}{2n^2 + 1}$ là (A) $-\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{2}$; (C) $-\infty$;
(D) $+\infty$; (E) 1

12. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^2 - n - 2}{5n^2 + n - 1}$ là (A) $-\dfrac{2}{5}$; (B) $\dfrac{2}{5}$;
(C) 2; (D) $+\infty$; (E) Không tồn tại

13. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2n^3 - 5n + 3}{3n^3 - n^2}$ là (A) 3 ; (B) $+\infty$;
(C) $-\dfrac{3}{2}$; (D) $\dfrac{2}{3}$; (E) $-\infty$

14. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{100n^3+7n-9}{1000n^2-n+1}$ là

(A) $\dfrac{1}{10}$; (B) Không tồn tại ; (C) $+\infty$; (D) -9 ; (E) $-\infty$

15. $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{\dfrac{2x+1}{x^2-x+6}}$ là (A) 2 ; (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; (C) 3 ;

(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (E) $\dfrac{3}{2}$

16. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$ là (A) $+\infty$; (B) $-\infty$; (C) $-\dfrac{1}{2}$;

(D) $\dfrac{1}{3}$; (E) $\dfrac{1}{2}$

17. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x}$ là (A) 1 ; (B) 2 ; (C) -1 ; (D) $\dfrac{1}{2}$; (E) 4

18. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x^2+1})$ là

(A) 0 ; (B) $-\infty$; (C) $+\infty$; (D) -10 ; (E) 8

19.. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+x+3}{x^2-x}$ là

(A) -2 ; (B) 2 ; (C) $+\infty$; (D) $-\infty$; (E) Không tồn tại

20. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+100}+x)$ là

(A) 0 ; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) 100 ; (E) 1

21. $\lim\limits_{x\to2}\sqrt{\dfrac{(2x+1)(3x^2-4)}{3x^3-4}}$ là

(A) 2 ; (B) -2 ; (C) $+\infty$; (D) $\sqrt{2}$; (E) 1

22. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2}{(x+1)^3}$ là

(A) 1; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) Không tồn tại ; (E) 2

23. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$ là

(A) $\sqrt{2}$; (B) 0 ; (C) 1 ; (D) 2 ; (E) Đáp số khác

24. Giới hạn nào sau đây không tồn tại

(A) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}$; (B) $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x^2}$;

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$; (D) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x^2}$

25. Bài toán tìm giới hạn của hàm số

$y=\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x^2+2x+4}$ *khi* $x\to+\infty$

Được một học sinh giải như sau:

(*I*) $\sqrt{x^2+4x+3}\simeq\sqrt{x^2}=x$

(*II*) $\sqrt{x^2+2x+4}\simeq\sqrt{x^2}=x$

(*III*) *Suy ra* $y\simeq x-x=0$ *khi* $x\to+\infty$

(IV) $\lim\limits_{x\to+\infty}y=0$

Bài toán trên, nếu sai thì sai ở giai đoạn nào ?

(A) Từ (I) ; (B) Từ (II); (C) Từ (III) ;
(D) Từ (IV) ; (E) Lập luận đúng.

26. Cũng bài toán trên, một học sinh khác giải như sau:

(*I*) $\sqrt{x^2+4x+3}=|x+2|+\varepsilon(x)=x+2+\varepsilon(x)$

(*II*) $\sqrt{x^2+2x+4}=|x+1|+\varepsilon'(x)=x+1+\varepsilon'(x)$

(*III*) $y=\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x^2+2x+4}$

$=x+2+\varepsilon(x)-(x+1)-\varepsilon'(x)=1+\varepsilon(x)-\varepsilon'(x)$

(*IV*) *Khi* $x\to+\infty\Rightarrow\varepsilon(x)\to0;\varepsilon'(x)\to0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}y=1$

Bài toán trên, nếu sai thì sai ở giai đoạn nào ?

(A) Từ (I) ; (B) Từ (II) ; (C) Từ (III) ;
(D) Từ (IV) ; (E) Lập luận đúng.

27. Bài toán tìm giới hạn của hàm số $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$ *khi* $x\to0$

được một học sinh giải như sau:

(*I*) $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1+1-\sqrt{x+1}}{x}$

(*II*) $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$

(*III*) $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

$$(IV)\qquad \lim_{x\to 0} y = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Bài toán trên, nếu sai thì sai ở giai đoạn nào ?

(A) Từ (I) ; (B) Từ (II) ; (C) Từ (III) ;

(D) Từ (IV) ; (E) Lập luận đúng.

28. Cũng bài toán trên, một học sinh khác giải như sau:

$$(I)\qquad \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1 + 1 - \sqrt{x+1}}{x}$$

$$(II)\qquad = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\left(\sqrt[3]{x+1} - 1\right) + \left(1 - \sqrt{x+1}\right)\right]$$

$$(III)\qquad = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} - \frac{x}{1 + \sqrt{x+1}}\right]$$

$$(IV)\quad \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} - \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Bài toán trên, nếu sai thì sai ở giai đoạn nào ?

(A) Từ (I) ; (B) Từ (II) ; (C) Từ (III) ;

(D) Từ (IV) ; (E) Lập luận đúng.

29. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m - 1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$

Để hàm số liên tục tại điểm x = 0 thì m phải bằng :

(A) 1 ; (B) - 1 ; (C) 0 ;

(D) 2 ; (E) Một kết quả khác

30. Phương trình nào sau đây có ít nhất một nghiệm trong khoảng (1 ; 3)

(A) $x^3 + 1000x^2 + 2x - 1 = 0$ (B) $x^3 + 3x - 2 = m$

(C) $x^2 + 2x^2 + x - 1 = 0$ (D) $x^3 - 2 + \dfrac{1}{x^3 - 2} = 0$

31. Cho ba hàm số $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2}$; $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x}$; $h(x) = \dfrac{-x^2 - 1}{x}$

Đường cong nào sau đây là đồ thị của mỗi hàm số trên.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG IV: GIỚI HẠN

§ 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài 1. a) $|u_n - 3| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n > 999$

b) Khi $n > 999 \Leftrightarrow |u_n - 3| < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{1000} < u_n < 3 + \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 2{,}999 < u_n < 3{,}001$

Bài 2. a) $|u_n - 3| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$; chọn $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, $n_0 \in N$

Khi đó : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - 3| < \varepsilon$.

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$

b) Lấy số dương M lớn tuỳ ý.

$u_n = \frac{n^2+2}{n+1} > \frac{n^2-1}{n+1} = n - 1 > M \Leftrightarrow n > M + 1$;

chọn $n_0 > M + 1$, $n_0 \in N$

Khi đó : $\forall n > n_0 \Rightarrow n > M + 1 \Rightarrow u_n = \frac{n^2+2}{n+1} > M$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2+2}{n+1} = +\infty$

c) $|u_n - 0| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \le \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$; chọn $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, $n_0 \in N$

Khi đó : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N : \forall n > n_0 \Rightarrow |u_n - 0| < \varepsilon$. Vậy

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

d) Ta có $1 - n^3 = (1-n)(n^2+n+1) \le 1 - n ; \forall n \in N$;

Lấy số dương M lớn tuỳ ý.

$u_n = \sqrt[3]{1-n^3} \le \sqrt[3]{1-n} < -M \Rightarrow n > M^3 + 1$; chọn $n_0 > M^3 + 1$, $n_0 \in N$

Khi đó : $\forall n > n_0 \Rightarrow n > M^3 + 1 \Rightarrow u_n = \sqrt[3]{1-n^3} < -M$.

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[3]{1-n^3} = -\infty$

Bài 3. a) - 1 ; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 0 ;

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-2}{1+2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1}=+\infty$; e) 3 ; f) 7 : g) 1

Bài 4. a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+a+a^2+a^3+...+a^n}{1+b+b^2+b^3+...+b^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{1-b}{1-a}\right)\cdot\left(\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}\right)\right]$

$$=\frac{1-b}{1-a}\;(|a|<1;|b|<1)$$

b) $\sqrt{3}-1$ c) 3 d) $-\infty$ e) $\dfrac{3}{2}$

Bài 5. a) $S_n=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[1-\dfrac{1}{2n+1}\right]$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$

b) Ta có : $S_n=2.1^2+3.2^2+...+(n+1)n^2=(1+1)1^2+(2+1).2^2+...+(n+1)n^2$

$$S_n=1^3+2^3+...+n^3+1^2+2^2+...+n^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n^4}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}\right]=\frac{1}{4}$$

c) Ta có : $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$S_n=\frac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=1$$

d) Ta có : $S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+...+\dfrac{2n-1}{2^n}$

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+...+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

Suy ra: $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\Leftrightarrow S_n=3-\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{2n}{2^n}+\frac{1}{2^n}$

Mặt khác : $\left|\frac{n}{2^n}\right|=\frac{n}{(1+1)^n}<\frac{2}{n-1}<\varepsilon\Rightarrow n>1+\frac{2}{\varepsilon}$ với ∀ n ∈N và ∀ ε > 0 .

Chọn $n_0>1+\frac{2}{\varepsilon}$, $n_0\in N$ thì $\forall n>n_0\Rightarrow\frac{n}{2^n}<\varepsilon\ \Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=3$

Bài 6. a) Ta có $-1\le\sin n\le1,\forall n\in N\Rightarrow\frac{n-1}{3n+4}\le\frac{n+\sin n}{3n+4}\le\frac{n+1}{3n+4}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{3n+4}=\frac{1}{3};\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n+4}=\frac{1}{3}\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sin n}{3n+4}=\frac{1}{3}$$

b) Ta có $-\frac{1}{n^2}\le\frac{\cos n}{n^2}\le\frac{1}{n^2},\forall n\in N^*\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{n^2}=0$

Nên $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n+3n^2}{\cos n+5n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{(-1)^n}{n^2}+3}{\frac{\cos n}{n^2}+5}=\frac{3}{5}$

c) Ta có $-\sqrt{2}\le\sin2n+\cos2n\le\sqrt{2},\forall n\in N\Rightarrow\frac{-\sqrt{2}}{3n+1}\le\frac{\sin2n+\cos2n}{3n+1}\le\frac{\sqrt{2}}{3n+1}$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin2n+\cos2n}{3n+1}=0$$

d) Ta có : $S_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\le\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$ với ∀ n ∈N

$$S_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\ge\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\frac{1}{n+\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}=\frac{n}{n+\sqrt{n}}$$

suy ra: $\frac{n}{n+\sqrt{n}}\le S_n\le\frac{n}{n+1}$

mà

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=1\ ;\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}S_n=1$$

Bài 7. a) **Cách 1.**

* Ta có: $u_1 = 2, u_2 = \frac{u_1 + 1}{2} = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{5}{4}, u_4 = \frac{9}{8}, ..., u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ với n $\in N^*$

* Chứng minh công thức $u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$, $n \in N^*$ (1) bằng phương pháp quy nạp toán học

+ Khi n = 1, ta có $u_1 = 2$, công thức (1) đúng

+ Giả sử công thức (1) đúng khi n = k ≥ 1, tức là $u_k = \frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}}$

+ Khi n = k+1, ta có $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} = \frac{2^k + 1}{2^k}$,

vậy $u_n = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$, $n \in N^*$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1.$

Cách 2.

* Chứng minh (u_n) là dãy giảm : $u_{n+1} < u_n$, $n \in N^*$

khi n = 1 , ta có $u_2 = \frac{u_1+1}{2} = \frac{3}{2} < 2 = u_1$, bất đẳng thức đúng

Giả sử bất đẳng thức đúng khi n = k ≥ 1, tức là $u_{k+1} < u_k$

Khi n = k+1, ta có $u_{k+2} = \frac{u_{k+1}+1}{2} < \frac{u_k+1}{2} = u_{k+1}$.

Vậy $u_{n+1} < u_n$, $n \in N^*$ nên (u_n) là dãy giảm (1)

* Chứng minh (u_n) là dãy giảm bị chặn dưới bởi số 0, tức là $u_n > 0$, $n \in N^*$

Khi n = 1 , ta có $u_1 = 2 > 0$, bất đẳng thức đúng

Giả sử bất đẳng thức đúng khi n = k ≥ 1, tức là $u_k > 0$

Khi n = k+1, ta có $u_{k+1} = \frac{u_k + 1}{2} > 0$

Vậy, $u_n > 0$, $n \in N^*$ (2). Từ (1) và (2) thì (u_n) là dãy có giới hạn

* Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $a > 0$

Ta có $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n+1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

b) * Chứng minh (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên

Ta có : $0 < u_n < 1, \quad n \in N$

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si :

$$u_{n+1} + (1 - u_n) \geq 2\sqrt{u_{n+1}(1-u_n)} > 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \ n \in N^*$$

Vậy (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên thì (u_n) là dãy có giới hạn

* Đặt $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a, \quad a > 0$

$$\text{Ta có } u_{n+1}(1-u_n) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty}\left[u_{n+1}(1-u_n)\right] \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow a(1-a) \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Bài 8. a) Ta có: $u_1 > 0, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \Rightarrow u_n > 0 \quad, \forall n \in N^*$

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \geq \sqrt{u_n.\frac{2}{u_n}} = \sqrt{2} \quad , \forall n \geq 1, \quad n \in N$$

Suy ra $u_n > \sqrt{2} \quad , \forall n \geq 2, n \in N$

b) Ta có: $u_n > \sqrt{2} \quad , \forall n \geq 2, n \in N$ nên (u_n) là dãy bị chặn dưới

Xét $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{u_n}\left(1 - \frac{u_n^2}{2}\right) < 0, \ \forall n \geq 2, n \in N$ nên

$u_{n+1} < u_n, \quad n \in N^*$

Vậy (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới thì (u_n) là dãy có giới hạn

* Đặt $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a, \quad a \geq \sqrt{2}$. Ta có

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$

Bài 9. a) $S = 1 + 0,9 + (0,9)^2 + ... + (0,9)^{n-1} + ... = \frac{1}{1 - 0,9} = 10$

b) Ta có: $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \tan\alpha < 1$ nên

$$S = 1 - \tan\alpha + \tan^2\alpha - \tan^3\alpha + \dots = \frac{1}{1 + \tan\alpha}$$

c) Ta có:

$$a = 0{,}27272727\dots = 0 + \frac{2}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \dots$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{2}{10^3} + \dots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \dots + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^4} + \dots = 2\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10^2}} + 7\frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{3}{11}$$

$$b = 0{,}999\dots = 0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots = \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots\right) = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Bài 10. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n+2) = a$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\cos(n+2) - \cos n\right] = 0$

$\Leftrightarrow -2\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1)\sin 1 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n+1) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sin n = 0$

Mặt khác : $\sin(n+1) = \sin n\cos 1 + \cos n\sin 1$, suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos n = 0$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} (\cos^2 n + \sin^2 n) = 0$, vô lý.

Vậy dãy số (u_n) với $u_n = \cos n$ không có giới hạn.

§ 2.GIỚI HẠN HÀM SỐ

Bài 1. a) $\forall (x_n), x_n \neq -3, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -3 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^2 - 9}{x_n + 3} = \lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - 3) = -6$

b) $\forall (x_n), x_n \in (1, +\infty), \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x_n^2 - 1}} = +\infty$

c) $\forall (x_n), x_n \neq 3, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 5 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n + 3}{3 - x_n} = \dfrac{5 + 3}{3 - 5} = -4$

d) $\forall (x_n), \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n^3 + 1}{x_n^2 + 1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n + \frac{1}{x_n^2}}{1 + \frac{1}{x_n^2}} = +\infty$

Bài 2. a) **Cách 1** * Lấy

$$x_n = \frac{1}{n} > 0,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

- Lấy

$$x_m = -\frac{1}{m} < 0,\ \lim_{m\to+\infty} x_m = \lim_{m\to+\infty}\left(-\frac{1}{m}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} f(x_m) = \lim_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{m^2} - 1\right) = -1$$

- Suy ra, hàm số không có giới hạn khi x → 0.

Cách 2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2 - 1\right) = -1$

Suy ra, hàm số không có giới hạn khi x → 0.

b) Lấy

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}},\ \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\sin 2n\pi = 0$$

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{2m\pi + \frac{\pi}{2}}},\ \lim_{m\to+\infty} x_m = \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2m\pi + \frac{\pi}{2}}} = 0 \Rightarrow \lim_{m\to+\infty} f(x_m) =$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\sin\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{m\to+\infty}\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Suy ra, hàm số không có giới hạn khi x → 0.

Bài 3.a) 14;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2 - x + 1}{\sqrt{4x^2 - x + 1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x - 1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$;

c) $\dfrac{11}{4}$; d) $-\infty$

Bài 4. a) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ b) 3 c) – 1

d) $\dfrac{7}{24}$ e) $\dfrac{7}{12}$ f) $-\dfrac{11}{12}$ g) $-\dfrac{5}{12}$ h) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

Bài 5. a) 0 b) $-\dfrac{7}{4}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) 1 e) -4 f) 1 g) 1 h) $-\dfrac{1}{12}$

Bài 6. a) 3 b) -32 c) 5 khi $x \to +\infty$; -1 khi $x \to -\infty$

d) 1 khi $x \to +\infty$; -1 khi $x \to -\infty$

e) $\dfrac{1}{3}$ khi $x \to +\infty$; $-\dfrac{1}{3}$ khi $x \to -\infty$ f) 1 khi $x \to +\infty$; -1 khi $x \to -\infty$

Bài 7. a) $-\frac{1}{2}$ *khi* $x \to +\infty$; $\frac{1}{2}$ *khi* $x \to -\infty$ b) 2 *khi* $x \to +\infty$; -2 *khi* $x \to -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x+x-\sqrt{x^2-x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3+x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}+\frac{x}{x+\sqrt{x^2-x}}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

Bài 8. a)

$\forall x\neq 0,\ -x^2\le x^2\sin\frac{1}{x}\le x^2$; $\lim\limits_{x\to0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to0}x^2=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=0$

b)

$\forall x>1.\ \dfrac{x^2-5}{x^3-1}\le\dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1}\le\dfrac{x^2+5}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5}{x^3-1}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1}=0$

$\forall x<1,\ \dfrac{x^2-5}{x^3-1}\ge\dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1}\ge\dfrac{x^2+5}{x^3-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-5}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5}{x^3-1}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+5\cos x}{x^3-1}=0$

c) $\dfrac{-x}{2x^2+1}\le\dfrac{x\sin x}{2x^2+1}\le\dfrac{x}{2x^2+1}$;

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{2x^2+1}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\sin x}{2x^2+1}=0$

d) $\dfrac{-\sqrt{5}}{x^2+x+1}\le\dfrac{\sin2x+2\cos2x}{x^2+x+1}\le\dfrac{\sqrt{5}}{x^2+x+1}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-\sqrt{5}}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{5}}{x^2+x+1}=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin2x+2\cos2x}{x^2+x+1}=0$

Bài 9. a) $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+2)=3$;

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^2+x+1\right)=3$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)=3 \quad \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=3$$

b) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+}(-1)=-1$ và $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-}(1)=1$

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$

Suy ra, hàm số không có giới hạn khi x → 5.

Bài 10. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(mx+2)=m+2$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x+1\right)=3$

Để hàm số có giới hạn khi x → 1 thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

Suy ra : m + 2 = 3 ⇔ m = 1

§ 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 1. a) Khi $x\neq 1, f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2x+-2}{x-1}=x^2+2$, hàm số liên tục trên R \ {1}

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2\right)=3\neq f(1)$, hàm số không liên tục tại x = 1. Hàm số liên tục trên R \ {1}

b) Khi $x\neq 0$, $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x^2}$, hàm số liên tục trên R \ {0}

$$-|x|\le x\cos\frac{1}{x^2}\le |x|, \forall x\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(-|x|\right)\le \lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x^2}\right)\le \lim_{x\to 0}\left(-|x|\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x^2}\right)=0=f(0)$$

Hàm số liên tục tại x = 0. Vậy hàm số liên tục trên R

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(1+x+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{|x|}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+x+\dfrac{x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2+x)=2$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(1 + x - \frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(x\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

Hàm số không liên tục trên tại x = 0

- Khi x > 0, f(x) = 2 + x, hàm số liên tục trên $(0\ ;\ +\infty)$
- Khi x < 0, f(x) = x, hàm số liên tục trên $(-\infty\ ;\ 0)$
- Vậy hàm số liên tục trên R \ {0}

d) Hàm số liên tục trên R \ {2 ; - 2}

Bài 2. a) * Khi x > 2, $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x - 2}$, hàm số liên tục trên $(2\ ;\ +\infty)$

* Khi x < 2, $f(x) = ax + \dfrac{1}{4}$, hàm số liên tục trên $(-\infty\ ;\ 0)$

* Để hàm số liên tục trên R, thì hàm số phải liên tục tại x = 2

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4}\right) = \dfrac{1}{4}$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(ax + \frac{1}{4}\right) = 2a + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2a + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = 0$$

b) m = 3

Bài 3. a) x = 0 ; b) x = 8

Bài 4. Hàm số liên tục tại x = 1 và gián đoạn tại x = 2 thì

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ 4b - a \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 3 \\ b \neq 3 \end{cases}$$

Bài 5. a) Xét $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ liên tục trên R, nên liên tục trên **(- 2 ; 2)**

f(- 2) = -3 , f (0) = 1 , f (1) = -3 và f (2) = 5

- f(- 2) f (0) < 0, phương trình có nghiệm thuộc (- 2 ; 0)
- f (0) f (1) < 0, phương trình có nghiệm thuộc (0 ; 1)
- f (1) f (2) < 0, phương trình có nghiệm thuộc (1 ; 2)

Một phương trình bậc ba dạng: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ với **a, b, c, d** thuộc R có nhiều nhất ba nghiệm. Suy ra : $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ba nghiệm trên (- 2 ; 2)

b) Xét $f(x) = x^5 - x - 2$ liên tục trên R và f(1) = -2 , f (2) = 28

$\Rightarrow$ f(1) f (2) < 0

Mặc khác :

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1^5-x_2^5)-(x_1-x_2)}{x_1-x_2} = \frac{(x_1-x_2)(x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4-1)}{x_1-x_2}$$

$$= x_1^4+x_1^3x_2+x_1^2x_2^2+x_1x_2^3+x_2^4-1>0 \quad , \forall x_1,x_2 \in (1,2)$$

Suy ra,hàm số đồng biến trên (1 ; 2) nên phương trình $x^5-x-2=0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (1\,;\,2)$

Ta có: $x_0^5 = x_0+2 > 2\sqrt{2x_0} \Leftrightarrow x_0^{10} > 8x_0 \Leftrightarrow x_0^9 > 8 \Leftrightarrow x_0 > \sqrt[3]{2}$

c) Làm tương tự câu b)

Bài 6. b) $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$ (1) và 2a + 3b + 6c = 0

Đặt t = tanx với $x \in \left(k\pi : \frac{\pi}{4}+k\pi\right) \Rightarrow t \in (0\,;1)$, ta có : $at^2+bt+c=0$ (2)

* Trường hợp 1. Nếu c = 0 thì $at^2+bt=0$

+ Khi a = 0 thì b = 0, phương trình (2) vô số nghiệm nên phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $\left(k\pi\,;\frac{\pi}{4}+k\pi\right), k \in Z$

+ Khi a ≠ 0 thì $-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$, từ phương trình $at^2+bt=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-\frac{b}{a}=\frac{2}{3} \end{array}\right.$,

phương trình (2) có nghiệm thuộc (0 ; 1) nên phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $\left(k\pi : \frac{\pi}{4}+k\pi\right), k \in Z$

* Trường hợp 2.

Nếu c ≠ 0 , ta có : f (0) = c và $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}(4a+6b+9c) = \frac{1}{9}(-12c+9c) = -\frac{c}{3}$

$f(0)f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{c^2}{3} < 0$, phương trình (2) có nghiệm thuộc $\left(0;\frac{2}{3}\right) \subset (0;1)$

nên phương trình (1) có nghiệm trong khoảng $\left(k\pi : \frac{\pi}{4}+k\pi\right), k \in Z$

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

Bài 1. Gọi S_1 là diện tích hình vuông thứ nhất có cạnh bằng a thì $S_1 = a^2$

Gọi S_2 là diện tích hình vuông thứ hai có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ thì $S_2 = \frac{a^2}{2}$

....

Gọi S_n là diện tích hình vuông thứ n thì $S_n = \dfrac{a^2}{2^{n-1}}$.

Tổng diện tích các hình vuông là $S = S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$

$$= a^2 + \frac{a^2}{2} + ... + \frac{a^2}{2^{n-1}} + ... = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = 2a^2$$

Bài 2. Tam giác ABC đều nên tâm O của đường tròn lớn nằm ở trọng tâm của tam giác. Đường cao của tam giác $h = \dfrac{3}{2}R = 3$ và cạnh $a = 2\sqrt{3}$

Mặt khác, tâm các đường tròn nhỏ bao giờ cũng là trọng tâm các tam giác nhỏ thuộc đường cao AH và các bán kính của các đường tròn đó là: $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^3}, ...$

Tổng diện tích các hình tròn dọc theo đường cao AH :

$$\pi\left[1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3^2}\right)^2+\left(\frac{1}{3^3}\right)^2+...\right] = \pi\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9\pi}{8}$$

Diện tích các hình tròn $S = 3.\dfrac{9\pi}{8} - 2\pi = \dfrac{11\pi}{8}$ và diện tích của tam giác:

$$S_1 = \frac{1}{2}ha = \frac{1}{2}3.2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Tỉ lệ phần trăm $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{11\pi}{24\sqrt{3}} \approx 0,83 = 83\%$

Bài 3. Ta biết 1 giờ = 60 phút và trên mặt đồng hồ chia thành 12 vạch bằng nhau nên kim phút chuyển động nhanh hơn kim giờ 12 lần

Khi kim phút đạt đến vị trí 1 thì kim giờ ở vị trí $1 + \dfrac{1}{12}$

Khi kim phút đạt đến vị trí $1 + \dfrac{1}{12}$ thì kim giờ ở vị trí $1 + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12^2}$

Tiếp tục như trên, để kim phút trùng với kim giờ thì :

$$S = 1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + ... = 1 + \frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{12}} = 1 + \frac{1}{11} \text{ giờ}$$

Kim phút trùng với kim giờ trên mặt đồng hồ tại thời điểm 1 giờ 5 phú

27 giây $\frac{3}{11}$.

Bài 4. a) - 2, b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2-n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2\left(n^2-n+1\right)}=\dfrac{1}{2}$, c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^2\right]=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^2\right]=4e$,

e) 3 , f) 1 , g) 7 , h) $\dfrac{1}{2}$

Bài 5.

a) $S_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$, $\lim\limits_{x\to+\infty}S_n=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3}\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]=\dfrac{1}{3}$

b) Ta có $\cot 2x=\dfrac{\cot^2 x-1}{2\cot x}=\dfrac{1}{2}\left[\cot x-\tan x\right]\Leftrightarrow \tan x=\cot x-2\cot 2x$

Suy ra: $\tan\alpha=\cot\alpha-2\cot 2\alpha$

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha$$

$$\frac{1}{2^2}\tan\frac{\alpha}{2^2}=\frac{1}{2^2}\cot\frac{\alpha}{2^2}-\frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$$

.....

$$\frac{1}{2^n}\tan\frac{\alpha}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cot\frac{\alpha}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

Cộng vế theo vế : $S_n=\dfrac{1}{2^n}\cot\dfrac{\alpha}{2^n}-2\cot 2\alpha$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cot\frac{\alpha}{2^n}-2\cot 2\alpha\right)=-2\cot 2\alpha$$

Bài 6. a) Chứng minh $0<u_n<\sqrt{3}$ (1) bằng quy nạp toán học

- Khi n = 1 ta có $0<u_1=1<\sqrt{3}$, công thức (1) đúng
- Giả sử công thức (1) đúng với n = k ≥ 1, tức là $0<u_k<\sqrt{3}$
- Khi n = k + 1, ta có $u_{k+1}=\dfrac{2u_k+3}{u_k+2}>0$

$$u_{k+1}-\sqrt{3}=\frac{2u_k+3}{u_k+2}-\sqrt{3}=\frac{\left(u_k-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{u_k+2}<0\Rightarrow u_{k+1}<\sqrt{3}.$$

Vậy $0<u_n<\sqrt{3}$

b) Chứng minh (u_n) là dãy tăng.

$u_{n+1}-u_n=\frac{2u_n+3}{u_n+2}-u_n=\frac{3-u_n^2}{u_n+2}>0\Rightarrow u_{n+1}>u_n$, vậy ($u_n$) là dãy tăng .

Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=a$ thì a > 0 và

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2u_n+3}{u_n+2}\Leftrightarrow a=\frac{2a+3}{a+2}\Leftrightarrow a^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\sqrt{3}\\a=-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\sqrt{3}$

Bài 7. a) $-\infty$, b) - 48 , c) $\frac{1}{8}$, d) 2 , e) $-\frac{3}{2}$, f) 2 , g) $-\frac{1}{4}$, h) $+\infty$

Bài 8. a) $-\frac{1}{3}$, b) 0, c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{5}{2}$, e) Không có giới hạn, f) -4 , g) 13 , h) $-\frac{2}{3}$

Bài 9. a) Hàm số liên tục trên R \ {1}, b) Hàm số liên tục trên R
c) Hàm số liên tục trên R, d) Hàm số liên tục trên R \ {0}.

Bài 10. Xét hàm $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)$ liên tục trên [0 , 1]

$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right), g\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)$ nên

$$g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)=-\left[f(0)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\leq 0$$

- Nếu $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(0)=0\\g\left(\frac{1}{2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ là nghiệm của phương trình g(x) = 0
- $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)<0$ thì tồn tại $x_0\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ sao cho $g(x_0)=0$
- Vậy, phương trình g(x) = 0 luôn có nghiệm trong $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Bài 11. a) Xét hàm số $f(x)=x^3-15x+1$ liên tục trên R và f(0) = 1, f(1) = −13 nên f(0)f(1) < 0

Suy ra: phương trình f(x) = 0 có nghiệm $x_0\in(0\,;\,1)$

b) Xét hàm số $f(x)=x^3+1000x^2+2x-10$ liên tục trên R và f(0) = −10. f(0,1) = 0,201 nên f(0)f(0,1) < 0. Suy ra: phương trình f(x) = 0 có nghiệm $x_0 \in (0 ; 0,1)$.

c) Xét hàm số $f(x)=x^3+3x-2-m$ liên tục trên R và f(1) = 2 − m. f(3) = 34 − m nên $f(1).f(3)=(2-m)(34-m)<0 \Leftrightarrow 2<m<34$.
Suy ra: phương trình f(x) = 0 có nghiệm $x_0 \in (1 ; 3)$.

d) Xét hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ liên tục trên R và f(1) = −1, f(2) = 1 nên f(0).f(1) < 0
Suy ra: phương trình f(x) = 0 có nghiệm $x_0 \in (1 ; 2)$.

e) Xét hàm số $f(x)=2\cos x+(m+1)\sin x-1$ liên tục trên R và f(0) = 1. $f(\pi)=-3$ nên $f(0).f(\pi)<0$
Suy ra: phương trình f(x) = 0 có nghiệm $x_0 \in (0 . \pi)\subset(-1 , 4)$.

Bài 12.

a) $a=0,2111... =\frac{2}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+... =\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+...$

$$=\frac{1}{10}+\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{9}=\frac{19}{90}$$

b) $\frac{157}{495}$, c) $\frac{79}{90}$ d) $\frac{41}{99}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B	E	D	E	A	B	E	A	C	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	C	B	D	C	B	E	A	A	B	A
Câu	21	22	23	24	25	26	27			
	D	B	A	D	B	E	C			

Chương V ĐẠO HÀM

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A. Kiến thức cơ bản

1. **Định nghĩa**: Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoang (a ; b) và $x_0 \in (a ; b)$. $x_0 + \Delta x \in (a ; b)$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ được gọi là đạo hàm của hàm f(x) tại điểm x_0, kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y(x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

2. Hàm số y = f(x) được gọi là có đạo hàm trên khoảng K nếu nó có đạo hàm tại mỗi điểm $x_0 \in K$.

3. **Quan hệ giữa tính liên tục và sự có đạo hàm**

$$\boxed{\text{f(x) có đạo hàm tại } x_0} \Rightarrow \boxed{\text{f(x) liên tục tại } x_0}$$

4. **Ý nghĩa hình học của đạo hàm**

Xét hàm số y = f(x) có đồ thị (C) và có đạo hàm tại x_0

- Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M_0(x_0 ; f(x_0))$ có hệ số góc
- Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M_0(x_0 ; f(x_0))$:

$$\boxed{k = f'(x_0)}$$

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

5. **Ý nghĩa vật lý của đạo hàm**

Vận tốc tức thời của một chuyển động s = S(t) là

$$\boxed{V(t) = S(t)}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Phương pháp: **1.** Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$

2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

3. Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

* Khi thay x_0 bởi x, ta tính được đạo hàm của hàm số f(x) tại điểm $x \in (a ; b)$

Bài 1. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ tại $x_0 = -1$; b) $f(x) = \sin x$ tại $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$

c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ với $x > \dfrac{1}{2}$; d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ với $x \neq 0$.

Giải

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

$\Delta x = x + 1 \Leftrightarrow x = -1 + \Delta x$ và $\Delta y = f(-1+\Delta x) - f(-1) = 2(\Delta x)^2 - \Delta x$

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(2\Delta x - 1\right) = -1.$$

b) $f(x) = \sin x$ và $\Delta x = x - \dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \Delta x$

$$\Delta y = f\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \Delta x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right).1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ với $x > \dfrac{1}{2}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x+\Delta x)-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\left(\sqrt{2(x+\Delta x)-1} + \sqrt{2x-1}\right)\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)-1} + \sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ với $x \neq 0$;

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)x}\right) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(x+\Delta x\right)x} = -\frac{1}{x^2}$$

Bài 2. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ tại $x_0=0$ b) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0\end{cases}$ tại

$x_0=0$

c) $f(x)=x^2+3|x-1|$ tại $x_0=2$; $x_0=-2$. Hàm số có đạo hàm tại $x_0=1$ không?

Giải

a) Ta có: $f(x)=\frac{x}{1+|x|}=\begin{cases}\frac{x}{1+x} & \text{nếu } x\geq 0\\ \frac{x}{1-x} & \text{nếu } x<0\end{cases}$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{1+\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1}{1+\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{1-\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{1}{1-\Delta x}=1$$

nên

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1\Rightarrow f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1$$

b) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-2+2-\sqrt{8x^2+4}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(\sqrt[3]{4x^2+8}-2+2-\sqrt{8x^2+4})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{4x^2}{\sqrt[3]{(4x^2+8)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4}-\frac{8x^2}{2+\sqrt{8x^2+4}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{(4x^2+8)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4}-\frac{8}{2+\sqrt{8x^2+4}}\right)=\frac{1}{3}-2=-\frac{5}{3}.$$

c) $f(x)=x^2+3|x-1|=\begin{cases}x^2+3x-3 & \text{nếu } x\geq 1\\ x^2-3x+3 & \text{nếu } x<1\end{cases}$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2+3(2+\Delta x)-10}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+7)=7$$

$$f'(-2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-2+\Delta x)^2-3(-2+\Delta x)-10}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\Delta x - 7\right) = -7$$

* Xét tại $x_0 = 1$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{(1+\Delta x)^2 + 3(1+\Delta x) - 3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+}\left(\Delta x + 5\right) = 5$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-}\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2 - 3(1+\Delta x) + 3 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-}\left(\Delta x - 1\right) = -1$$

Suy ra: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0^-}\dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

Nên không tồn tại $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ Vậy, hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

Dạng 2. Quan hệ giữa tính liên tục và sự có đạo hàm

Phương pháp: **1.** Hàm số có đạo hàm tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó. điều ngược lại không đúng.

2. Để chứng minh hàm số không có đạo hàm tại điểm x_0 ta thực hiện như sau:

- Chứng minh $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ không tồn tại
- Hoặc chứng minh hàm số không liên tục tại x_0.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ (x+1)^2 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Chứng minh rằng hàm số liên tục tại x = 0 nhưng không có đạo hàm tại x = 0.

Giải

*** Chứng minh hàm số liên tục tại x = 0**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(x-1)^2 = 1 = f(0) \text{ và } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x+1)^2 = 1 = f(0)$$

Suy ra: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$.

*** Chứng minh hàm số không có đạo hàm tại x = 0**

$$\lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+}\frac{(\Delta x - 1)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+}\left(\Delta x - 2\right) = -2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-}\frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-}\frac{(\Delta x + 1)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-}\left(\Delta x + 2\right) = 2$$

Suy ra: $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

nên không tồn tại $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$. Vậy, hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0\end{cases}$ Chứng minh rằng hàm số liên tục trên R nhưng không có đạo hàm tại x = 0.

Giải

*** Chứng minh hàm số liên tục trên R**

+ Khi $x \neq 0$, ta có $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x^2}$ liên tục trên $R\setminus\{0\}$

+ Chứng minh hàm số liên tục tại x = 0 : Với $\forall\, x\neq 0$

$$-|x|\le x\sin\frac{1}{x^2}\le|x|\Rightarrow 0=\lim_{x\to 0}\left(-|x|\right)\le\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x^2}\right)\le\lim_{x\to 0}|x|=0$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x^2}\right)=0=f(0)$$

Vậy, hàm số liên tục trên R.

*** Chứng minh hàm số không có đạo hàm tại x = 0 :**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)$$

+ Lấy dãy (x_n), $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}}$

và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+2n\pi}}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)=1$

+ Lấy dãy (x'_n), $x'_n=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2n\pi}}$

và $\lim\limits_{n\to+\infty}x'_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi}{6}+2n\pi}}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(x'_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2n\pi\right)=\dfrac{1}{2}$

Suy ra, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x\sin\frac{1}{x^2}}{}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$ không tồn tại nên hàm số không có đạo hàm tai x = 0.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & \text{nếu } x\ge 1\\ 2x-1 & \text{nếu } x<1\end{cases}$. Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại x = 1.

Giải

* Để hàm số có đạo hàm tại x = 1 thì hàm số liên tục tại x = 1

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2+bx)=a+b=f(1)$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=1$

Suy ra: a + b = 1 (1)

*) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(ax^2+bx)-(a+b)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(a(x+1)+b)=2a+b$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(2x-1)-(a+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(2x-1)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}2=2$

Suy ra: 2a + b = 2 (2)

Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}a+b=1\\ 2a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$.

- **Dạng 3. Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số y = f(x) tại điểm $M_0(x_0\,;\,f(x_0))\in(C)$**

Phương pháp:

1. Tính $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ hoặc

   $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
2. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại M_0 là $k=f'(x_0)$
3. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại M_0 là

   $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Bài 6. a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+2$ tại điểm (– 1 ; – 2)

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}$ tại điểm có hoành độ x = 0

Giải

a) $f'(x_0) = f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x+1}$

$= \lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 4x + 4) = 9$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm (– 1 ; – 2) là

$k = f'(-1) = 9$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm (– 1 ; – 2) là

$y = 9(x+1) - 2 = 9x + 7$

b) Khi x = 0 thì $f(0) = \dfrac{5}{2}$

$$f'(x_0) = f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2+4x+5}{x+2} - \dfrac{5}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + 3x}{2x(x+2)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x+3}{2(x+2)} = \frac{3}{4}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x = 0 là

$k = f'(0) = \dfrac{3}{4}$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x = 0 là

$y = \dfrac{3}{4}(x - 0) + \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2} = 9x + 7$

Dạng 4. Tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số y = f(x) khi biết hệ số góc k.

Phương pháp:

1. Gọi điểm $M_0(x_0 ; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C)
2. Tính $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
3. Giải phương trình $k = f'(x_0)$ tìm x_0, rồi tìm $y_0 = f(x_0)$
4. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) có hệ số góc k là
   $y = k(x - x_0) + y_0$

Chú ý: * Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì có cùng hệ số góc.

* Nếu hai đường thẳng vuông góc với nhau thì tích hai hệ số góc bằng – 1.

Bài 7. a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2x+1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến là $\dfrac{1}{3}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$, biết tiếp tuyến

i) Song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$

ii) Vuông góc với dường thẳng $x + 4y = 0$

Giải

a) **Gọi điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0) \in (C)$** là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) **của hàm số** $y = \sqrt{2x+1}$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2(x+\Delta x)+1} - \sqrt{2x+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{2(x+\Delta x)+1} + \sqrt{2x+1}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+\Delta x)+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $\frac{1}{3}$ nên:

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 > -\dfrac{1}{2} \\ 2x_0 + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 4\ ;\ y_0 = f(4) = 3$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = \sqrt{2x+1}$ là:

$$y = \frac{1}{3}(x-4) + 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

b) **Gọi điểm $M_0(x_0\ ;\ y_0) \in (C)$** là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) **của hàm số** $y = x^2 - 2x + 3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) + 3\right] - \left[x^2 - 2x + 3\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+\Delta x)\Delta x - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(2x + \Delta x - 2\right) = 2x - 2$$

i) **Đường thẳng** $4x - 2y + 5 = 0$ có hệ số góc $k = 2$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $4x - 2y + 5 = 0$ nên có hệ số góc $k = 2$

Ta có: $f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2\ ;\ y_0 = f(2) = 3$

Phương trình tiếp tuyến là $y = 2(x - 2) + 3 \Rightarrow y = 2x - 1$

ii) **Đường thẳng** $x + 4y = 0$ có hệ số góc $k_1 = -\frac{1}{4}$

Tiếp tuyến vuông với đường thẳng $x + 4y = 0$ nên có hệ số góc $k = 4$

Ta có: $f'(x_0) = 4 \Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 3\ ;\ y_0 = f(3) = 6$

Phương trình tiếp tuyến là $y = 4(x - 3) + 6 \Rightarrow y = 4x - 6$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 5x - 7$; b) $y = 3x^2 - 4x + 9$; c) $y = \sqrt[3]{x-1}$

d) $y = \cos x$; e) $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$; f) $y = \sqrt{x} + x$

Bài 2. a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ Tính f'(0).

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ Tính f'(0).

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng hàm số liên tục trên tập số thực R.
b) Hàm số có đạo hàm tại điểm x = 0 không? Tại sao?

Bài 4. a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{nếu } x \geq 0 \\ \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{x} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ Tìm a, b để hàm số có đạo hàm tại điểm x = 0.

b) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{nếu } x \leq 3 \\ 4x - 1 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$ Tìm a để hàm số không có đạo hàm tại điểm x = 3.

Bài 5. Cho hàm số $y = x^3$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết:

a) Tiếp điểm (1 ; 1)
b) Hoành độ của tiếp điểm $x_0 = 2$
c) Tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 3x + 5
d) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\dfrac{x}{2} + 1$

Bài 6. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm có hoành độ x = 2.
b) Chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 7. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ có đồ thị (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm có hoành độ x = 0.

b) Chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc lớn nhất.

§ 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đạo hàm một số hàm đơn giản.

$(C)' = 0$ với C là hằng số

$(x^n)' = nx^{n-1}$ với $n \in N^*$, $x \in R$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$

2. Quy tắc tính đạo hàm

1. $(au)' = a.u'$ với a là hằng số
2. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
3. $(uv)' = u'v + uv'$ và $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ và $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

3. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu y = f(x) và u = φ(x) thì $y'_x = y'_u . u'_x$

Hệ quả: Nếu u là một hàm theo biến x thì

1. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ với $n \in N^*$

2. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ với $u > 0$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng công thức đối với hàm đa thức

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ với $a_i \in R$ và i = 0, 1, 2,..., n

Phương pháp: – Áp dụng quy tắc 1 và 2 ; đạo hàm các hàm đơn giản

– $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$; b) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$; c) $y = (x^2 + 1)(3 - 2x^2)$

d) $y = (x-1)(x+2)(x-3)$; e) $y = (x^2 + 3)^5$; g) $y = x(x+2)^4$

Giải

a) $y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right)' = x^2 - 4x + 3$

b) $y' = (-x^4 + 2x^2 + 3)' = -4x^3 + 4x$

c) $y' = (x^2+1)'(3-2x^2) + (x^2+1)(3-2x^2)' = 2x(3-2x^2) - 4x(x^2+1) = -8x^3 + 2x$

d) $$y' = (x-1)'(x+2)(x-3) + (x-1)(x+2)'(x-3) + (x-1)(x+2)(x-3)'$$
$$= (x+2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x+2) = 3x^2 - 3x - 5$$

e) $y' = [(x^2+3)^5]' = 5(x^2+3)^4(x^2+3)' = 10x(x^2+3)^4$

g) $y' = (x)'(x+2)^4 + x[(x+2)^4]' = (x+2)^4 + 4x(x+2)^3 = (x+2)^3(5x+2)$

Dạng 2. Tính đạo hàm bằng công thức đối với hàm hữu tỉ

Phương pháp: - $\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]' = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q^2(x)}$

- $$\left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]' = \frac{(ax+b)'(cx+d) - (ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$\left[\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right]' = \frac{(ax^2+bx+c)'(dx+e) - (ax^2+bx+c)(dx+e)'}{(dx+e)^2}$$

$$= \frac{(2ax+b)(dx+e) - d(ax^2+bx+c)}{(dx+e)^2} = \frac{adx^2 + 2aex + be - dc}{(dx+e)^2}$$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{-x^2+2x+3}{x^3-2}$; b) $y = \frac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$; c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{x}$

d) $y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{1}{x-1}$; e) $y = \frac{2x+1}{x+1}$; g) $y = \frac{4}{2-x}$

Giải

a) $$y' = \left(\frac{-x^2+2x+3}{x^3-2}\right)' = \frac{(-x^2+2x+3)'(x^3-2) - (-x^2+2x+3)(x^3-2)'}{(x^3-2)^2}$$

$$= \frac{(-2x+2)(x^3-2) - 3x^2(-x^2+2x+3)}{(x^3-2)^2} = \frac{x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 4x - 4}{(x^3-2)^2}$$

b) $y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2+3x-3}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\left[\frac{(-x^2+3x-3)'(x-1)-(-x^2+3x-3)(x-1)'}{(x-1)^2}\right]$

$= \frac{(-2x+3)(x-1)-(-x^2+3x-3)}{2(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x}{2(x-1)^2}$

c) $y' = \left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{4}x\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{4}-\frac{1}{x^2} = \frac{x^2-4}{4x^2}$

d) $y' = \left(\frac{1}{2}x-1+\frac{1}{x-1}\right)' = \left(\frac{1}{2}x-1\right)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}-\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{2(x-1)^2}$

e) $y' = \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)' = \frac{(2x+1)'(x+1)-(2x+1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

g) $y' = \left(\frac{4}{2-x}\right)' = -\frac{4(2-x)'}{(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2}$

Dạng 3. Tính đạo hàm bằng công thức đối với hàm $y=\sqrt{u(x)}$

Phương pháp: $\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ với u(x) > 0

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y=\frac{2}{x}+5\sqrt{x}$; b) $y=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$; c) $y=(x-2)\sqrt{x^2+1}$

d) $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{4-x}$; e) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ với a là hằng số

Giải

a) $y' = \left(\frac{2}{x}+5\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{2}{x}\right)' + \left(5\sqrt{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}+\frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{5x\sqrt{x}-4}{2x^2}$

b) $y' = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{3}\left(x\sqrt{x}\right)' = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right) = \sqrt{x}$

c) $y' = \left[(x-2)\sqrt{x^2+1}\right]' = (x-2)'\sqrt{x^2+1}+(x-2)(\sqrt{x^2+1})' = \sqrt{x^2+1}+(x-2)\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$= \sqrt{x^2+1}+\frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

d) $y' = (\sqrt{x+2}+\sqrt{4-x})' = (\sqrt{x+2})' + (\sqrt{4-x})' = \dfrac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}} + \dfrac{(4-x)'}{2\sqrt{4-x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$

e) $y' = \left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)' = \dfrac{(x)'\sqrt{a^2-x^2} - x(\sqrt{a^2-x^2})'}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \dfrac{\sqrt{a^2-x^2} - x\dfrac{(a^2-x^2)'}{2\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2}$

$$= \dfrac{\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{(\sqrt{a^2-x^2})^2} = \dfrac{a^2}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

Dạng 4. Tính đạo hàm của hàm mang dấu giá trị tuyệt đối hoặc hàm số có nhiều biểu thức

Phương pháp:

1. Tính đạo hàm của hàm số trên từng khoảng của tập xác định mà trên đó hàm số là một biểu thức tính được đạo hàm bằng công thức.
2. Tại các đầu mút của các khoảng, xét sự tồn tại đạo hàm theo định nghĩa.
3. Kết luận về sự tồn tại đạo hàm của hàm số đó.

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{nếu } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \ge 1 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{nếu } x \ne 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Giải

a) Tập xác định: D = $(-\infty ; 1) \cup [1 ; +\infty) = R$

- Khi x < 1, ta có $f(x) = \dfrac{3-x^2}{2}$ nên $f'(x) = \left(\dfrac{3-x^2}{2}\right)' = -x$
- Khi x > 1, ta có $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nên $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
- Khi x = 1, ta có $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x} = 1$ và

  $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{3-x}{2} = 1$

  Suy ra : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 1 = f(1)$ nên hàm số liên tục tại x = 1

Mặt khác : $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{\Delta x+1}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\left(-1\right)=-1$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\dfrac{3-\left(\Delta x+1\right)^2}{2}-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\left(\Delta x\right)^2-2\Delta x}{2\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x-2}{2}=-1$$

Suy ra: $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(\Delta x+1)-f(1)}{\Delta x}=-1=f'(1)$

Vậy $f'(x)=\begin{cases}-x & \text{nếu } x<1\\ -1 & \text{nếu } x=1\\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x>1\end{cases}$

b) Tập xác định: D = R

- Khi $x \neq 0$, ta có $f(x)=x^2-2x$ nên $f'(x)=(x^2-2x)'=2x-2$
- Khi $x = 0$, ta có $f(0) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x)=0\neq f(0)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$. Suy ra, hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$
- Vậy hàm số có đạo hàm trên tập R \ { 0 } và $f'(x)=2x-2$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\left|1+x\right|-\left|1-x\right|}{\left|1+x\right|+\left|1-x\right|}$

Xét tính liên tục của hàm số và tính đạo hàm của hàm số (nếu có).

Giải

Tập xác định: D = R

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\left\|1+x\right\|$		$-1-x$	0	$1+x$	||	$1+x$	
$\left\|1-x\right\|$		$1-x$	||	$1-x$	0	$-1+x$	
f(x)		$\frac{1}{x}$	-1	x	1	$\frac{1}{x}$	

Ta có $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{nếu } x<-1 \text{ hoặc } x>1\\ x & \text{nếu } -1\le x\le 1\end{cases}$

* Khi x <–1 hoặc x >1, ta có $f(x)=\dfrac{1}{x}$ nên hàm số liên tục trên $(-\infty;-1)$ $\cup(1;\infty)$ và $f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$

* Khi $-1<x<1$, ta có : f(x) = x nên hàm số liên tục trên (– 1 ; 1) và

$f'(x)=(x)'=1$

* Khi x = –1, ta có : f(–1) = –1

và $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-1$; $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(x)=-1$ nên hàm số liên tục tại x = – 1

Mặc khác: $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{-1+\Delta x+1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^+}(1)=1$

$$\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{\dfrac{1}{-1+\Delta x}+1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{1}{-1+\Delta x}=-1$$

Suy ra: $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$ nên hàm số không có đạo hàm tại x = –1.

* Khi x = 1, ta có : f(1) = 1

và $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x)=1$; $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$ nên hàm số liên tục tại x = 1

Mặc khác: $\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0^-}(1)=1$

$$\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0^+}\left(-\frac{1}{1+\Delta x}\right)=-1$$

Suy ra: $\lim\limits_{\Delta x\to0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to0^-}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$ nên hàm số không có đạo hàm tại x = 1.

Vậy: – Hàm số liên tục trên R

– Hàm số có đạo hàm trên R \ { ± 1 } và $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x < -1 \text{ hoặc } x > \\ 1 & \text{nếu } -1 < x < 1 \end{cases}$

– Hàm số không có đạo hàm tại x = ± 1

Dạng 5. Tiếp tuyến với đồ thị (C)của hàm số y = f(x) kẻ từ một điểm A(α ; β) với A ∈ (C) hoặc A ∉ (C)

Phương pháp:

Cách 1: Tìm tiếp điểm

1. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, tiếp tuyến (d) là
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (1)$$
2. A ∈ (d) nên thay x = α, y = β vào (1) ta có:
$$\beta = f'(x_0)(\alpha - x_0) + f(x_0) \qquad (2)$$
3. Giải phương trình (2) tìm x_0, rồi tính $f(x_0)$ và $f'(x_0)$.
4. Thay các kết quả tìm được vào (1) ta có phương trình tiếp tuyến của (d)

Cách 2: Tìm hệ số góc k

1. Đường thẳng (d) đi qua điểm A(α ; β), có hệ số góc k, có phương trình :
$$y = k(x - \alpha) + \beta \qquad (1)$$
2. Đường thẳng (d) là tiếp tuyến với đồ thị (C) thì hệ phương trình sau phải có nghiệm:
$$\begin{cases} f(x) = k(x - \alpha) + \beta \\ f'(x) = k \end{cases}$$

3. Giải hệ phương trình tìm x, rồi tìm k và thay giá trị k vừa tìm được vào (1) ta có
phương trình tiếp tuyến của (d)

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C)

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) kẻ từ điểm A(0 ; 2)

b) Tìm trên đường thẳng y = 2 các điểm để từ đó có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Giải

a) **Cách 1** Ta có $y' = 3x^2 - 6x$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, tiếp tuyến (d) là $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Suy ra: $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$, A(0 ; 2)∈ (d) nên

$$2=(3x_0^2-6x_0)(0-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2 \Leftrightarrow -2x_0^3+3x_0^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

* Khi $x_0=0$ thì $f(x_0)=f(0)=2$ và $f'(x_0)=f'(0)=0$ nên phương trình tiếp tuyến (d) là $y=2$

* Khi $x_0=\dfrac{3}{2}$ thì $f(x_0)=f(\dfrac{3}{2})=-\dfrac{11}{8}$ và $f'(x_0)=f'(\dfrac{3}{2})=-\dfrac{9}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến (d) là $y=-\dfrac{9}{4}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)-\dfrac{11}{8} \Leftrightarrow y=-\dfrac{9}{4}x+2$.

Cách 2.

Đường thẳng (d) đi qua điểm A (0 ; 2), có hệ số góc k, có phương trình :
$y=kx+2$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến với đồ thị (C) thì hệ phương trình sau phải có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=kx+2 \\ f'(x)=k\end{cases}$ Suy ra: $\begin{cases} x^3-3x^2+2=kx+2 & (1) \\ 3x^2-6x=k & (2)\end{cases}$

Thay phương trình (2) vào phương trình (1), ta có:

$$2x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

* Khi x = 0 thì k = $f'(0)=0$ nên phương trình tiếp tuyến (d) là y = 2

* Khi $x=\dfrac{3}{2}$ thì k = $f'(\dfrac{3}{2})=-\dfrac{9}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến (d) là :

$y=-\dfrac{9}{4}x+2$

b) Gọi A (a ; 2) thuộc đường thẳng y = 2 và (d) là đường thẳng đi qua điểm A (a ; 2) , có hệ số góc k nên có phương trình : $y=k(x-a)+2$

Để có hai tiếp tuyến với đồ thị (C) thì phương trình sau phải có hai nghiệm $\begin{cases} f(x)=k(x-a)+2 \\ f'(x)=k\end{cases}$ Suy ra: $\begin{cases} x^3-3x^2+2=k(x-a)+2 & (1) \\ 3x^2-6x=k & (2)\end{cases}$

Thay phương trình (2) vào phương trình (1), ta có:

$$x\left[-2x^2+3x(a+1)-6a\right]=0$$

Suy ra : $x\left[-2x^2+3x(a+1)-6a\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \\ -2x^2+3x(a+1)-6a=0 & (3)\end{array}\right.$

Để kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau thì phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và $y'(x_1).y'(x_2) = -1$

Suy ra:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ 6a\neq 0\\ y'(x_1).y'(x_2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2-10a+3>0\\ a\neq 0\\ 9x_1x_2\left[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\right]=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<\dfrac{1}{3}\\ a>3\end{array}\right.\\ a\neq 0\\ 9x_1x_2\left[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\right]=-1\end{cases}$$

Theo Viét : $x_1+x_2=\dfrac{3(a+1)}{2}$; $x_1x_2=3a$

Thay vào: $9x_1x_2\left[x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\right]=-1$

Ta có: $27a=-1\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{27}$. Vậy điểm cần tìm $A\left(-\dfrac{1}{27};2\right)$

C. BÀI TẬP

Tính đạo hàm của các hàm số sau

Bài 1. **a)** $y=2x^3-9x^2+12x-4$ b) $y=(x^2+1)(x^3+1)^2(x^4+1)^3$

c) $y=x^4-8x^2+10$; d) $y=\dfrac{2x-3}{x+4}$; e) $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}$

Bài 2. **a)** $y=-x^3+3mx^2+3(1-m^2)x+m^3-m^2$ với m là tham số

b) $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$ với m là tham số

c) $y=\dfrac{(2m-1)x-m^2}{x-1}$ với m là tham số

d) $y=\dfrac{x^2+(k+1)x+k+1}{x+1}$ với k là tham số

Bài 3. **a)** $y=\sqrt{x^3-2x^2+1}$; b) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

c) $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$; d) $y=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+ax$ với a là tham số

Bài 4. a) Cho $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)}+1\right).\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}:\left(\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2}\right)^2$

Tính $f'(x)$.

b) Cho $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm x để

i) $f'(x) > 0$ ii) $f'(x) < 0$

c) Cho $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính $f(3) + (x-3)f'(3)$

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2 + \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -1 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$

a) Xét tính liên tục của hàm số trên R

b) Hàm số f có đạo hàm tại những điểm nào? Tính đạo hàm của hàm số f tại những điểm đó.

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số y = f(x), biết :

a) $f(x) = 3x - 4x^3$ và tiếp tuyến đi qua điểm A(1 ; 3)

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$ và tiếp tuyến đi qua điểm B(0 ; $\frac{3}{2}$)

c) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ và tiếp tuyến đi qua điểm M(0 ; 1)

Bài 7. a) Cho hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ có đồ thị (C). Chứng minh rằng qua điểm A(1 ; – 1) kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

b) Tìm m để từ điểm M (m ; 0) kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía đối với trục Ox.

§ 3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM LƯỢNG GIÁC

A. Tóm tắt kiến thức cơ bản

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Khi u = u(x)

$$(\sin u)' = u'\cos u \qquad (\cos u)' = -u'\sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} \qquad (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng công thức đối với các hàm lượng giác

Phương pháp: 1. Áp dụng các quy tắc tính đạo hàm

2. Áp dụng các đạo hàm lượng giác cơ bản.

Bài 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \sin 3x + \cos\frac{x}{2} + \tan\sqrt{x}$ b) $y = \sin\left(x^2 - 5x + 1\right) + \cot\frac{x}{2}$

c) $y = 3\sin^2 x\cos x + \cos^2 x$ d) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Giải

a) $y' = (\sin 3x + \cos\frac{x}{2} + \tan\sqrt{x})' = (\sin 3x)' + (\cos\frac{x}{2})' + (\tan\sqrt{x})'$

$$= 3\cos 3x - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$$

b) $y' = \left[\sin\left(x^2 - 5x + 1\right) + \cot\frac{x}{2}\right]' = \left[\sin\left(x^2 - 5x + 1\right)\right]' + \left(\cot\frac{x}{2}\right)'$

$$= \left(2x - 5\right)\cos\left(x^2 - 5x + 1\right) - \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

c) $y' = (3\sin^2 x\cos x + \cos^2 x)' = [3(1 - \cos^2 x)\cos x + \cos^2 x]'$

$$= (3\cos x - 3\cos^3 x + \cos^2 x)' = (3\cos x)' - (3\cos^3 x)' + (\cos^2 x)'$$

$$= -3\sin x + 9\cos^2 x\sin x - \sin 2x$$

d)

$$y' = \left[\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right]' = \frac{(\sin x + \cos x)'(\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Dạng 2. Chứng minh rằng hàm số f(x) có đạo hàm f'(x) không phụ thuộc vào x

Phương pháp

Cách 1: 1.Sử dụng các công thức lượng giác để biến đổi hàm số f(x) thành hàm hằng hoặc có dạng f(x) = ax + b (a, b là những hằng số).

2. Chứng minh $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x) = a$ (a là hằng số).

Cách 2: 1. Tính đạo hàm $f'(x)$

2. Sử dụng các công thức lượng giác để biến đổi $f'(x)$ thành hằng số

Bài 2. Chứng minh rằng các hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc vào x

a) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$

b) $f(x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$

Giải

Cách 1:

) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^2 x = 1$

Suy ra: $f'(x) = 0$

) Ta có

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2} \quad ; \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)}{2} \quad ; \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)}{2}$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right)\right] - 2\sin^2 x$$

$$= 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) - 2\sin^2 x = 2 - \cos 2x - 2\sin^2 x$$

$$= 1 + 1 - \cos 2x - 2\sin^2 x = 1 + 2\sin^2 x - 2\sin^2 x = 1$$

Suy ra: $f'(x) = 0$

Cách 2.

) $f'(x) = (\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2)$

$= 6\sin^5 x\cos x - 6\cos^5 x\sin x + 3(2\sin x\cos^3 x - 2\cos x\sin^3 x)$

$= 6\sin x\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x)$

$= 6\sin x\cos x[(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x - \sin^2 x]$

$= 6\sin x\cos x[\sin^2 x - \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x] = 0$

) $f'(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2x\right) - 2\sin 2x$

$$= -2\cos\frac{2\pi}{3}\sin 2x - 2\cos\frac{4\pi}{3}\sin 2x - 2\sin 2x$$

$$= \left(-\cos\frac{2\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3} - 1\right)2\sin 2x = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1\right)2\sin 2x = 0$$

Dạng 3. Giải phương trình $f'(x) = 0$

Phương pháp: 1. Tính đạo hàm $f'(x)$

2. Để giải phương trình $f'(x) = 0$ ta áp dụng cách giải các phương trình lượng giác cơ bản và một số phương trình lượng giác thường gặp.

Bài 3. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng

a) $f(x) = 3\cos x + 4\sin x + 5x$

b) $f(x) = \sin 2x - 2\cos x$

Giải

a) $f'(x) = -3\sin x + 4\cos x + 5$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\sin x + 4\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x - 4\cos x = 5$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1$$

Đặt $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ thì $\sin\varphi = \frac{4}{5}$ với $0 \le \varphi < 2\pi$

Ta có: $\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\varphi\sin x - \sin\varphi\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \varphi) = 1$

$\Leftrightarrow x = \varphi + \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in Z$

b) $f'(x) = 2\cos 2x + 2\sin x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x + 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$

Đặt $t = \sin x$ thì $-1 \le t \le 1$

Ta có : $2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ với $k \in Z$

Bài 4. Tìm m để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm, biết rằng

a) $f(x) = 3\sin x + 4\cos x + 2mx$

b) $f(x) = 3\cos^2 x + 2mx$.

Giải

a) $f'(x) = 3\cos x - 4\sin x + 2m$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\cos x - 4\sin x + 2m = 0 \Leftrightarrow 3\cos x - 4\sin x = -2m \quad (1)$

Để phương trình (1) có nghiệm thì

$$3^2 + (-4)^2 \geq (-2m)^2 \Leftrightarrow 9+16 \geq 4m^2 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$$

b) $f'(x) = -3\sin 2x + 2m$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3\sin 2x + 2m = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{2m}{3} \quad (2)$

Để phương trình (2) có nghiệm thì:

$$\left|\frac{2m}{3}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2m}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số f xác định $f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Hàm số f có đạo hàm tại những điểm nào? Tính đạo hàm của hàm f tại các điểm đó.

Bài 2. Cho hàm số f xác định, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

a) Tính đạo hàm của hàm f tại mỗi điểm $x \in R$.

b) Chứng tỏ rằng đạo hàm của hàm $f'(x)$ không liên tục tại điểm $x = 0$.

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = 5\sin x - 3\cos x$ b) $f(x) = x\cot x$

c) $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ d) $f(x) = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x$

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = \sqrt{1 + 2\tan x}$ b) $f(x) = \sin\sqrt{1 + x^2}$

c) $f(x) = \sin\left(\cos^2 x\right).\cos\left(\sin^2 x\right)$ d) $f(x) = 3\sin^2 x - \sin^3 x$

Bài 5. Chứng minh rằng các hàm số sau có đạo hàm không phụ thuộc vào x

a) $f(x)=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$

b) $f(x)=\cos^6 x+2\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\sin^4 x$

c) $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

d) $f(x)=\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

Bài 6. Giải phương trình $f'(x)=0$, biết rằng

a) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\sin x$

b) $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}x$

Bài 7. a) Cho hàm số $f(x)=\frac{x-1}{2}\cos^2 x$

Giải phương trình $f(x)-(x-1)f'(x)=0$

b) Cho hàm số $f(x)=2m(\sin x-\cos x)-(\sin x+\cos x)-\left(2m^2+\frac{3}{2}\right)x$

Tìm m để phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm

§4 VI PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a\,;b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a\,;b)$.
Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x+\Delta x \in (a\,;b)$

Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x là : $\boxed{dy=df(x)=f'(x)dx}$

2. Ứng dụng vào phép tính gần đúng : $\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm vi phân của hàm số y = f(x)

Phương pháp: 1. Tính đạo hàm $f'(x)$

2. Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x là $df(x)=f'(x)dx$

3. Vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại x_0 là $df(x_0)=f'(x_0)dx$

Bài 1. Tìm vi phân của các hàm số sau

a) $f(x) = \sin x - x\cos x$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

c) $f(x) = x^3 - x^2 + 9x - 1$ tại $x_0 = 1$ d) $f(x) = x\cos x$ tại $x = \dfrac{\pi}{2}$

Giải

a) $f'(x) = \cos x - (\cos x - x\sin x) = x\sin x$ nên $df(x) = x\sin x dx$

b) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$ nên $df(x) = -\dfrac{3}{x^4}dx$

c) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 9 \Rightarrow f'(1) = 10$ nên $df(1) = 10dx$

d) $f'(x) = \cos x - x\sin x \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ nên $df\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}dx$

Bài 2. Tìm a) $\dfrac{d(\cos^2 x)}{d(\cos 2x)}$ b) $\dfrac{d(x^4 - 2x^2 + 3)}{d(2x^2)}$

Giải

a) Ta có : $d(\cos^2 x) = -\sin 2x dx$; $d(\cos 2x) = -2\sin 2x dx$

nên $\dfrac{d(\cos^2 x)}{d(\cos 2x)} = \dfrac{1}{2}$

b) Ta có : $d(x^4 - 2x^2 + 3) = (4x^3 - 4x)dx$; $d(2x^2) = 4xdx$

nên $\dfrac{d(x^4 - 2x^2 + 3)}{d(2x^2)} = x^2 - 1$

Dạng 2. Tính gần đúng giá trị của một biểu thức

Phương pháp:

1. Lập hàm số $y = f(x)$ và chọn x_0, Δx một cách thích hợp.
2. Tính đạo hàm $f'(x)$, $f'(x_0)$ và $f(x_0)$
3. Giá trị gần đúng của biểu thức $P = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Bài 3. Tính gần đúng các giá trị sau

a) $\sqrt{4,01}$ b) $\dfrac{1}{0,9995}$ c) $\sin 29^0$ d) $\tan 44^0 52'$

Giải

Cách 1.

a) Đặt $f(x) = \sqrt{x}$, chọn $x_0 = 4$ và $\Delta x = 0,01$ thì $4,01 = 4 + 0,01 = x_0 + \Delta x$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$; $f(4) = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{4,01} = f(4+0,01) \approx f(4) + f'(4).0.01 = 2.0025$. Vậy $\sqrt{4,01} \approx 2,0025$

b) Đặt $f(x) = \dfrac{1}{x}$, chọn $x_0 = 1$ và $\Delta x = -0,0005$ thì $\dfrac{1}{0,9995}$

$= \dfrac{1}{1-0,0005} = \dfrac{1}{x_0 + \Delta x}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $f'(1) = -1$; $f(1) = 1$

$\dfrac{1}{0,9995} = f(1-0,0005) \approx f(1) + f'(1).(-0.0005) = 1.0005$

vậy $\dfrac{1}{0,9995} \approx 1.0005$

c) Đặt $f(x) = \sin x$, chọn $x_0 = 30^0$ và $\Delta x = -1^0 = -\dfrac{\pi}{180}$

thì $29^0 = 30^0 - 1^0 = x_0 + \Delta x$

$f'(x) = \cos x$, $f'(30^0) = \cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $f(30^0) = \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}$

$\sin 29^0 = f(30^0 - 1^0) \approx f(30^0) + f'(30^0).\left(-\dfrac{\pi}{180}\right) \approx 0.4849$ vậy

$\sin 29^0 \approx 0,4849$

d) Đặt $f(x) = \tan x$, chọn $x_0 = 45^0$ và $\Delta x = -0^0\,8' = -\left(\dfrac{2}{15}\right)^0 = -\dfrac{\pi}{1350}$ (rad)

thì $44^0\,52' = 45^0 - 0^0\,8' = x_0 + \Delta x$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $f'(45^0) = \dfrac{1}{\cos^2 45^0} = 2$; $f(45^0) = \tan 45^0 = 1$

$\tan 44^0 52' = f(45^0 - 0^0 8') \approx f(45^0) + f'(45^0).\left(-\dfrac{\pi}{1350}\right) \approx 0,9954$ vậy

$\tan 44^0 52' \approx 0,9954$.

Cách 2.

a) Đặt $f(x) = \sqrt{4+x}$, chọn $x_0 = 0$ và $\Delta x = 0,01$ thì $4,01 = 4+0+0,01 = 4 + x_0 + \Delta x$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{4+x}}$, $f'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{4+0}} = \dfrac{1}{4}$; $f(0) = \sqrt{4} = 2$.

$\sqrt{4,01} = f(0+0,01) \approx f(0) + f'(0).0,01 = 2.0025$ vậy $\sqrt{4,01} \approx 0,0025$

b) Đặt $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, chọn $x_0 = 0$ và $\Delta x = -0,0005$ thì $\dfrac{1}{0,9995}$

$$\frac{1}{1+0-0,0005} = \frac{1}{1+x_0+\Delta x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}\ ,\ f'(0) = -1\quad ;\quad f(0) = 1$$

$$\frac{1}{0,9995} = f(0-0,0005) \approx f(0) + f'(0).(-0,0005) = 1,0005 \text{ vậy } \frac{1}{0,9995} \approx 1.0005$$

c) * Đổi từ đơn vị độ sang đơn vị rad : $\begin{matrix} 1^0 \rightarrow \dfrac{\pi}{180} \\ a^0 \rightarrow \alpha \end{matrix}$ suy ra: $\alpha = \dfrac{a}{180}\pi$

Với $a^0 = 29^0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{29}{180}\pi = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}$

Đặt $f(x) = \sin x$, chọn $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$ và $\Delta x = -\dfrac{\pi}{180}$ thì $29^0 = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{180}$ (rad)

$= x_0 + \Delta x$

$$f'(x) = \cos x\ ,\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\quad ;\quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 29^0 = \sin\frac{29\pi}{180} = f\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right).\left(-\frac{\pi}{180}\right) \approx 0,4849.$$

Vậy $\sin 29^0 \approx 0,4849$

d) Ta có: $a^0 = 44^0 52' = \left(\dfrac{673}{15}\right)^0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{673}{270}\pi = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{1350}$

Đặt $f(x) = \tan x$, chọn $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ và $\Delta x = = -\dfrac{\pi}{1350}$ (rad) thì $44^0\,52' = x_0 + \Delta x$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\ ,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2\quad ;\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan 44^0 52' = f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{1350}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(-\frac{\pi}{1350}\right) \approx 0,9954$$

Vậy $\tan 44^0 52' \approx 0,9954$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm vi phân của các hàm số sau

a) $f(x)=\dfrac{2x-1}{1-x}$ b) $f(x)=\tan^2 x$ c) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-x^2}$

d) $f(x)=\sin^2 x$ tại $x=\dfrac{\pi}{6}$ e) $f(x)=x^3-4x+1$ tại x = 1.

Bài 2. Tìm a) $\dfrac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$ b) $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

Bài 3. Tính gần đúng các giá trị sau:

a) $\sqrt{120}$ b) $\cos 61^0$ c) $\tan 44^0 30'$ d) $\sin 45^0 30'$

§5 ĐẠO HÀM CẤP CAO

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Giả sử hàm số f(x) có đạo hàm f'(x). Nếu hàm số f'(x) cũng có đạo hàm thì ta gọi đạo hàm đó là đạo hàm cấp hai của hàm số f(x). Kí hiệu f''(x)

$$\boxed{f''(x)=\left[f'(x)\right]'}$$

Tổng quát $$\boxed{f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]' \text{ với } n\in\mathbb{N}^*}$$

là đạo hàm cấp n của hàm số f(x). Kí hiệu $f^{(0)}(x)=f(x)$.

2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2: Đạo hàm cấp hai f''(t) là gia tốc tức thời của chuyển động s = f(t)

$$\boxed{a(t)=f''(t)}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm đạo cấp cao của hàm số y = f(x)

Phương pháp: 1. Tính đạo hàm cấp 1 : f'(x).

2. Tính đạo hàm cấp 2 : $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$

3. Tính đạo hàm cấp 3 : $f^{(3)}(x)=\left[f''(x)\right]'$

4. Tính đạo hàm cấp 4 : $f^{(4)}(x)=\left[f^{(3)}(x)\right]'$

5. Tính đạo hàm đến cấp được chỉ ra.

Bài 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

a) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$. $f''(x)$ b) $f(x) = (2x-3)^5$. $f^{(5)}(x)$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. $f^{(3)}(x)$ d) $f(x) = \cos^2 x$. $f^{(4)}(x)$

Giải

a) $f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}$; $f''(x) = \left[\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}\right]' = \dfrac{2x^3+3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

b) $f'(x) = 10(2x-3)^4$. $f''(x) = \left[10(2x-3)^4\right]' = 80(2x-3)^3$

$$f^{(3)}(x) = \left[80(2x-3)^3\right]' = 480(2x-3)^2$$

$$f^{(4)}(x) = \left[480(2x-3)^2\right]' = 1920(2x-3)$$

$$f^{(5)}(x) = \left[1920(2x-3)\right]' = 3840$$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = x + \dfrac{1}{x+1}$ nên $f'(x) = \left[x + \dfrac{1}{x+1}\right]' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$$f''(x) = \left[1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right]' = \frac{2}{(x+1)^3} \quad ; f^{(3)}(x) = \left[\frac{2}{(x+1)^3}\right]' = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

d) $f'(x) = -\sin 2x$, $f''(x) = -4\cos 2x$; $f^{(3)}(x) = 8\sin 2x$; $f^{(4)}(x) = 16\cos 2x$

Dạng 2. Tìm đạo hàm cấp n của hàm số y = f(x)

Phương pháp:
1. Tính đạo hàm $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$
2. Dự đoán công thức đạo hàm cấp n của hàm số.
3. Chứng minh công thức dự đoán bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bài 2. a) Giả sử rằng hàm số f(x) có đạo hàm đến cấp n. Chứng minh

$$\left[f(ax+b)\right]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b) \quad (1)$$

b) Giả sử u = u(x), v=v(x) hai hàm có đạo hàm đến cấp n. Chứng minh

$$\left[uv\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)} \quad (2)$$

Giải

a) Khi n = 1,ta có $\left[f(ax+b)\right]' = (ax+b)' f'(ax+b) = af'(ax+b)$ công thức (1) đúng

Giả sử công thức (1) đúng khi n = k, tức là :

$\left[f(ax+b)\right]^{(k)} = a^k f^{(k)}(ax+b)$

Khi n = k + 1, ta chứng minh : $\left[f(ax+b)\right]^{(k+1)} = a^{k+1} f^{(k+1)}(ax+b)$

Thật vậy, $[f(ax+b)]^{(k+1)} = ([f(ax+b)]^{(k)})' = (a^k f^{(k)}(ax+b))'$

Vậy, $\left[f(ax+b)\right]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$

b) Khi n = 1, ta có:

$$\left[uv\right]' = u'v + uv' = C_1^0 u^{(0)} v' + C_1^1 u' v^{(0)} = C_1^0 uv' + C_1^1 u'v = \sum_{k=0}^{1} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Công thức (2) đúng

Giả sử công thức (2) đúng với n ≥ 1, n ∈N, tức là:

$$\left[uv\right]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Ta cần chứng minh : $\left[uv\right]^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)}$

Thật vậy,

$$\left[uv\right]^{(n+1)} = \left(\left[uv\right]^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)}\right.$$

$$= u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(n+1)} v^{(0)} \quad (*)$$

Thay $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u^{(k+1)} v^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n+1-k)}$ vào (*) ta được:

$$\left[uv\right]^{(n+1)} = u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left[C_n^k + C_n^{k-1}\right] u^{(k)} v^{(n-k+1)} + u^{(n+1)} v^{(0)}$$

$$= C_{n+1}^0 u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n-k+1)} + C_{n+1}^{n+1} u^{(n+1)} v^{(0)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)}$$

Công thức (2) được chứng minh.

Bài 3. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

a) $f(x) = \sin x$ b) $f(x) = \cos x$ c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Giải

a) $f(x) = \sin x$

*** Dựa đoán công thức đạo hàm cấp n**

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad f''(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(3)}(x) = \cos(x+\pi) = \sin\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right);$$

$$f^{(4)}(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(x+2\pi) = \sin\left(x + 4.\frac{\pi}{2}\right)$$

nên $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

*** Chứng minh công thức được dự đoán**

Khi n = 1, công thức đúng

Giả sử công thức đúng khi n = k, tức là $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$

Khi n = k + 1, ta cần chứng minh $f^{(k+1)}(x) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Thật vậy, $f^{(k+1)}(x) = \left[\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Vậy, $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ với $n \geq 1$, $n \in N$.

b) **Chứng minh tương tự câu a) ta có** $f^{(n)}(x) = (\cos)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

với $n \geq 1$, $n \in N$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

*** Dựa đoán công thức đạo hàm cấp n**

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{2!}{(1+x)^{2+1}}; f^{(3)}(x) = (-1)^3\frac{3!}{(1+x)^{3+1}}$$

nên $f^{(n)}(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n\dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$

*** Chứng minh công thức được dự đoán**

Khi n = 1, công thức đúng

Giả sử công thức đúng khi n = k, tức là $f^{(k)}(x) = (-1)^k \dfrac{k!}{(1+x)^{k+1}}$

Khi n = k + 1, ta cần chứng minh $f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \dfrac{(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$

Thật vậy.

$$f^{(k+1)}(x) = \left[\frac{1}{1+x}\right]^{(k+1)} = \left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k)}\right]' = \left[(-1)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}\right]'$$

$$= (-1)^{k+1} k!(k+1)\frac{(1+x)^k}{(1+x)^{2k+2}} = (-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$$

Vậy, $f^{(n)}(x) = \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$ với n ≥ 1, n ∈ N

d) Chứng minh tương tự câu c) ta có $f^{(n)}(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

với n ≥ 1, n ∈ N

Bài 4. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau (với n ≥ 1, n ∈ N)

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ b) $f(x) = \sin^2 x$

Giải

a) Ta có $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1}$

$$f^{(n)}(x) = \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right]^{(n)} = \left[\frac{1}{x-2}\right]^{(n)} - \left[\frac{1}{x-1}\right]^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$$

b) Ta có $f(x) = \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

$$f^{(n)}(x) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right]^{(n)} = -\frac{1}{2}[\cos 2x]^{(n)}$$

$$= -\frac{1}{2}2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Dạng 3. Chứng minh hệ thức có đạo hàm

Phương pháp: 1. Tính đạo hàm của hàm số y = f (x) đến cấp đã chỉ ra.

2. Thay các kết quả đó vào vế trái (vế phải)của hệ thức và biến đổi bằng vế phải (vế trái). {Hoặc biến đổi hàm số y = f (x) trước, rồi thực hiện theo (1) và (2) }

Bài 5. Chứng minh rằng mỗi hàm số sau thoả mãn hệ thức tương ứng đã cho

a) $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ chứng minh $2(y')^2=(y-1)y''$

b) $y=\sqrt{2x-x^2}$ chứng minh $y^3y''+1=0$

c) $y=\dfrac{\sin^3x+\cos^3x}{1-\sin x\cos x}$ chứng minh $y''+y=0$.

Giải

a) Ta có: $y=\dfrac{x-3}{x+4}=1-\dfrac{7}{x+4}$ nên $y'=\dfrac{7}{(x+4)^2}$; $y''=-\dfrac{14}{(x+4)^3}$

Thay vào:

$$(y-1)y''=\left(1-\frac{7}{x+4}-1\right)\left(-\frac{14}{(x+4)^3}\right)=\frac{98}{(x+4)^4}=2\left(\frac{7}{(x+4)^2}\right)^2=2(y')^2$$

b) Ta có: $y=\sqrt{2x-x^2}$ nên

$$y'=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\ ;\ y''=\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)'=-\frac{1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$$

Thay vào : $y^3y''+1=(\sqrt{2x-x^2})^3\dfrac{(-1)}{(\sqrt{2x-x^2})^3}+1=-1+1=0$.

c) Ta có:

$$y=\frac{\sin^3x+\cos^3x}{1-\sin x\cos x}=\frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2x+\cos^2x-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$$

Nên $y'=(\sin x+\cos x)'=\cos x-\sin x$; $y''=-\sin x-\cos x$

Thay vào : $y''+y=(-\sin x-\cos x)+(\sin x+\cos x)=0$.

Dạng 4. Tính gia tốc tức thời của một chuyển động S = f(t)

Phương pháp:

1. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là $v(t)=f'(t)$

2 Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t là $a(t)=v'(t)=f''(t)$.

Bài 6. Phương trình chuyển động của một chất điểm : $S = 15 + 20t^2 - 8t^3$

(Ở đây, S tính bằng mét, t tính bằng giây)

a) Tại thời điểm nào, chất điểm sẽ dừng.

b) Tìm gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t = 5 ; t = 10

c) Tìm vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0.

Giải

a) Ta có: $S = 15 + 20t^2 - 8t^3$ nên $v(t) = S'(t) = 40t - 24t^2$

Chất điểm sẽ dừng khi vận tốc bằng 0.

Suy ra $v(t) = 0 \Leftrightarrow 40t - 24t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

b) Ta có $a(t) = v'(t) = S''(t) = 40 - 48t$

- Khi t = 5 thì $a(5) = 40 - 48.5 = 40 - 240 = -200\,(m/s^2)$
- Khi t = 10 thì $a(10) = 40 - 48.10 = 40 - 480 = -440\,(m/s^2)$

c) Tại thời điểm gia tốc bằng 0 thì $a(t) = 40 - 48t = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{40}{48} = \dfrac{5}{6}$

$$v(t) = 40t - 24t^2 \Rightarrow v\left(\frac{5}{6}\right) = 40.\frac{5}{6} - 24.\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{50}{3}(m/s)$$

C. BÀI TẬP.

Bài 1. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau

a) $y = \sin 5x\cos 2x$

b) $y = \sin^2 5x$

c) $y = \dfrac{2x+1}{x^2 + x - 2}$

d) $y = \dfrac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}$

Bài 2. Tìm đạo hàm đến cấp đã cho của các hàm số sau

a) $y = x\sqrt{1+x^2}$, tìm y'' ;

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, tìm $y^{(3)}$

c) $y = x^2\sin x$, tìm $y^{(25)}$;

d) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tìm $y^{(100)}$

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + 16\cos x - \cos 2x$

a) Tìm $f'(x)$ và $f''(x)$. Từ đó tính $f'(0)$ và $f''(\pi)$.

b) Giải phương trình $f''(x) = 0$

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) Tìm $f'(x)$ và $f''(x)$.

b) Chứng minh $(1-x^2)f''(x) = 3xf'(x)+f(x)$

c) Suy ra rằng $(1-x^2)f^{(n+1)}(x) = (2n+1)xf^{(n)}(x)+n^2f^{(n-1)}(x)$ với $n \ge 2, n\in N$

Bài 5. Chứng minh rằng mỗi hàm số sau thoả mãn hệ thức tương ứng đã cho

a) $y = \dfrac{3x+5}{x}$ chứng minh $xy' + y = 3$

b) $y = x\sin x$ chứng minh $xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = 0$

c) $y = x\tan x$ chứng minh $x^2y'' - 2(x^2+y^2)(1+y) = 0$

d) $y = \dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1+\sin x\cos x}$ chứng minh $y + y'' = 0$

Bài 6. Phương trình chuyển động của một chất điểm : $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$

(Ở đây, S tính bằng mét, t tính bằng giây)

a) Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm t = 3 ; t = 6

b) Tìm gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm vận tốc bằng 0.

c) Tìm vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc bằng 0.

ÔN TẬP CHƯƠNG V

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại x_0

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8} - \sqrt{8x^2+4}}{\sin 2x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

b) $f(x) = \left|x^2 - 5x + 6\right|$ tại $x_0 = 2$

Bài 2.Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh hàm số liên tục trên R

b) Hàm số có đạo hàm tại những điểm nào? Tính đạo hàm của hàm số tại các điểm đó.

Bài 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + a^3$ (a là tham số) b) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$

c) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$ d) $y = x\cot^2 x$

e) $y = 3\sin^2 x\cos x + \cos^2 x$ f) $y = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 3x}}$

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{nếu } -\sqrt{2} \le x \le 1 \\ x^2+bx+c & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

Tìm b và c để hàm số có đạo hàm tại x = 1

Bài 5.

a) Cho hàm số $f(x) = \cos 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $f'''(\pi)$ và $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{9}\right)$

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x - x\sin x}$. Tính $f'(\pi)$

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \cos x$. Chứng minh:

$$2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right)f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = f'''(0) - f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^3-1} - \frac{1}{x-1} & \text{nếu } x \ne 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ có đồ thị (C)

a) Xác định a để hàm số liên tục tại x = 1.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm thuộc (C) và có tung độ bằng – 2.

Bài 8. Tính đạo hàm cấp n của mỗi hàm số sau

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ b) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{2x^2+x-1}$ c) $f(x) = \sin x.\sin 2x.\sin 3x$

Bài 9. a) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

b) Tìm trên đường cong $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$ những điểm mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng y = 2x

c) Tìm các cặp điểm trên đồ thị của hàm số $f(x) = x - \frac{1}{x+1}$ để các tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

d) Đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ cắt trục hoành tại gốc toạ độ dưới một góc bao nhiêu độ (góc giữa trục hoành và tiếp tuyến tại giao điểm)

Bài 10. Cho hàm số $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho, biết

a) Hoành độ tiếp điểm $x_0=0$

b) Tiếp tuyến song song với đường thẳng y = – x + 3

c) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng 4 x – y + 10 = 0

d) Tiếp tuyến đi qua điểm A (2 ; 0)

Bài 11. Tìm m để đồ thị của hàm số :

a) $f(x)=\frac{x^2-mx+1}{x+2}$ tiếp xúc với đường thẳng y = 0

b) $f(x)=4x^3-3x$ tiếp xúc với đường thẳng y = mx – 1

Bài 12. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}$ có đồ thị (C_m).

a) Chứng minh rằng $xy''-y'-x^2=0$

b) Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C_m) có hoành độ bằng – 1.Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng 5x – y = 0

Bài 13. Phương trình chuyển động của một chất điểm $S=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2$

(Ở đây, S tính bằng mét và t tính bằng giây)

Chứng minh rằng gia tốc của chuyển động đó dương tại mọi thời điểm

Bài 14. Phương trình chuyển động của một chất điểm $S=2t^3-2t^2+t-1$

(Ở đây, S tính bằng mét và t tính bằng giây)

a) Tính gia tốc tại thời điểm t = 4 (giây)

b) Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc bằng 0

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

. Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x}}$ với x < 0 là:

A) $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x^3(x-3)}}$

B) $f'(x)=\frac{-3}{x^2\sqrt{\frac{x-3}{x}}}$

C) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-3}{2}}}$

D) $f'(x)=\sqrt{\frac{3}{x^2}}$

E) $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{\frac{x-3}{x}}}$

2. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x - \tan^2 3x$ là :

A) $f'(x) = 2\cos x - 2\tan 3x$ B) $f'(x) = \sin 2x - \dfrac{2\tan 3x}{\cos^2 3x}$

C) $f'(x) = -\sin 2x - \dfrac{6\tan 3x}{\cos^2 x}$ D) $f'(x) = -\sin 2x + \dfrac{6\tan 3x}{\cos^2 x}$

E) $f'(x) = -\sin 2x - \dfrac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$

3. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{|x|}$ là :

A) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$ B) $f'(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$

C) $f'(x) = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$ D) Không tính được

4. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-3}$ tại x = 4 là :

A) $-\dfrac{1}{8}$ B) $\dfrac{1}{4}$ C) $\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) Tất cả đều sai

5. Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2\cos x$ tại x = $\dfrac{\pi}{2}$ là :

A) 0 B) $-\dfrac{\pi^2}{4}$ C) $\dfrac{\pi^2}{2}$ D) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^2}{4}$ E) $\dfrac{\pi^2}{4}$

6. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x} + a^3$ (với a là tham số) tại x = a^2 là:

A) 0 B) $3a^2$ C) $|a|^3$ D) $a^3 + 3a^2$ E) $-a^3$

7. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ tại x = $\dfrac{\pi}{4}$ là :

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $-\sqrt{2}$ D) 2 E) Đáp số khác

8. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\tan 2x}$ tại x = $\dfrac{\pi}{8}$ là :

A) 0 B) 1 C) –1 D) –2 E) Đáp số khác

9. Cho hai hàm số f(x) và g(x) xác định và có đạo hàm trên R. Biểu thức nào sau đây dùng để tính đạo hàm của hàm số $y = f[g(x)]$

A) $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ B) $f'(x)g'(x)$

C) $f'[g(x)]g'(x)$ D) Tất cả đều sai

10. Cho hai hàm số f(x) = x + 2 và g(x) = $x^2 - 2x + 3$.

Đạo hàm của hàm số $y = g\left[f(x)\right]$ tại x = 1

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) Đáp số khác

1. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right)^2 + 3\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right) + 2$ tại x = 0 là :

A) 5 B) −5 C) 15 D) −15 E) Đáp số khác

2. Đạo hàm của hàm số $f(x) = (\sqrt{\sin 2x + 1})^3 + 2\sqrt{\sin 2x + 1} + 2$ tại x = 0 là:

A) 5 B) −5 C) $\sqrt{5}$ D) $-\sqrt{5}$ E) Đáp số khác

3. Cho hai hàm số f(x) và g(x) xác định và có đạo hàm trên R và hàm số $y = f\left[g(x)\right]$, biểu thức nào sau đây đúng?

A) $dy = f'(x)g'(x)dx$ B) $dy = f'\left[g(x)\right]g'(x)dx$

C) $dy = f'\left[g(x)\right]dx$ D) Tất cả đều sai

4. Cho hai hàm số $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$, biểu thức nào sau đây đúng?

A) $dy = -\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$ B) $dy = -\dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}dx$

C) $dy = \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$ D) $dy = \dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}dx$

5. Hàm số nào sau đây thoả mãn: $y'' + 4y = 0$ với $y'(0) = 0$ và y(0) = 0

A) y = sin2x B) y = cos2x C) y = 0

D) y = cos2x − sin2x E) Đáp số khác

6. Hàm số nào sau đây thoả mãn : $(1 - \cos x)y' - y\sin x = 0$

A) y = 1 + cosx B) y = 1 + sinx C) y = 1 − cosx

D) y = x − cosx E) y = −1 − cosx

7. Đạo hàm cấp n của hàm số y = cosx là :

A) − sinx B) cosx C) $\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

D) $\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ E) Tất cả đều sai

8. Đạo hàm cấp n của hàm số y = sinxcosx là :

A) $2^n \sin\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ B) $2^{n-1}\sin\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

C) $\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ D) $\sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)\cos x + \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x$

E) Tất cả đều sai

19. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = 2\sin 3x\cos x$ là :

A) $2^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ B) $2\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

C) $2.3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ D) $2.3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)\cos x+2\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\sin 3x$

E) $2^{2n}\sin\left(4x+n\frac{\pi}{2}\right)+2^n\sin\left(2x+n\frac{\pi}{2}\right)$

20. Cho hàm số $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+1$ (1). Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (1) tai điểm M có hoành độ bằng 1 là:

A) $y=-\frac{1}{6}$; B) $y=-x+\frac{5}{6}$; C) y = 0; D) $y=-x-\frac{1}{6}$; E) $y=-x-\frac{7}{6}$.

21. Cho hàm số $f(x)=\cos x+ax$ (1). Để tiếp tuyến với đồ thị (1) không có phương song song với trục Ox thì a phải thoả mãn điều kiện nào?

A) $a=\pm 1$ B) a > 1 C) a < 1 D) $|a|>1$ E) $|a|<1$

22. Cho hàm số $f(x)=\sin\left(\alpha x+\frac{\pi}{6}\right)$ (1). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ bằng x = 0 là $g(x)=2x+\frac{1}{2}$ thì α là

A) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ B) $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C) 4 D) – 4 E) Đáp số khác

23. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 0 & \text{nếu } x=0\end{cases}$ Hàm số có đạo hàm tại x = 0 thì giá trị của α là:

A) α = 0 B) α = 1 C) α > 1 D) α < 1 E) α bất kỳ

24. Chuyển động của một chất điểm thay đổi đều có gia tốc a = 2 (m/ s^2), vận tốc ban đầu

v_0 = 3 (m / s), hoành độ ban đầu x_0 = 2 (m). Phương trình chuyển động là :

A) $S = t^2 - 3t + 2$ B)$S = t^2 + 3t + 2$ C) $S = t^2 - 3t - 2$

D) $S = -t^2 + 3t + 2$ E) Đáp số khác

25. Phương trình chuyển động của một chất điểm $S=\frac{1}{2}\left(3t^2+t^4\right)$(S tính bằng mét, t tính bằng giây).Gia tốc tại thời điểm t = 4 (s) là

A) 64 (m/ s^2) B) 65 (m/ s^2) C) 66 (m/ s^2) D) 67 (m/ s^2)

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

CHƯƠNG V: ĐẠO HÀM

§ 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

Bài 1. a) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 5$

) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(6x + 3\Delta x - 4\right) = 6x - 4$

) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+\Delta x - 1} - \sqrt[3]{x-1}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+\Delta x-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$

$$= -2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

e)

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{11}{(x+\Delta x+4)(x+4)} = \dfrac{11}{(x+4)^2}$

Bài 2. a) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(x \sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$

) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}.4} = \dfrac{1}{2}$

Bài 3. a) Khi x ≠ 0, $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x^2}$ nên hàm số liên tục trên R\ { 0 }

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(x\cos\dfrac{1}{x^2}\right) = 0 = f(0)$, hàm số liên tục tại x = 0. Vậy hàm số liên tục trên R.

) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$ không tồn tại, nên hàm số không có đạo hàm tại x = 0

Bài 4. a) Hàm số có đạo hàm tại x = 0 thì hàm số liên tục tại x = 0 nên :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (ax+b) = b = f(0),$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x} = 2\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 3x \sin x}{x} = 0$$

Suy ra: b = 0. Hàm số có đạo hàm tại x = 0 thì

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ax}{x} = \lim_{x\to 0^+} a = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 3x \sin x}{x^2} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra: $a = \frac{2}{3}$

b) Để hàm số không có đạo hàm tại x = 3 thì hàm số không liên tục tại x = 3.

Suy ra:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim_{x\to 3^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 3^+} (4x-1) \neq \lim_{x\to 3^-} (x^2+a) \Leftrightarrow 11 \neq 9 + a \Leftrightarrow a \neq 2$$

Bài 5. a) y = 3x – 2, b) y = 12x – 6, c) y = 3x – 2 hoặc y = 3x + 2.
d) y = 27x – 54 hoặc y = 27x + 54

Bài 6. a) Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại điểm có hoành độ x = 2 là

$y = -x + \frac{8}{3}$ có hệ số góc – 1.

b) Gọi M (x_0, y_0) ∈ (C), tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc

$k = y'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3 = (x_0 - 2)^2 - 1 \geq -1$. Vậy, tiếp tuyến (Δ) tại điểm có hoành độ x = 2 có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 7. a) Phương trình tiếp tuyến (Δ) tại điểm có hoành độ x = 0 là

$y = 3x + 1$ có hệ số góc 3.

b) Gọi M (x_0, y_0) ∈ (C), tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc:

$k = y'(x_0) = -3x_0^2 + 3 \leq 3$

Vậy, tiếp tuyến (Δ) tại điểm có hoành độ x = 0 có hệ số góc lớn nhất

§ 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Bài 1. a) $y' = 6x^2 - 18x + 12$ b) $y' = 4x^3 - 16x$

c) $y' = \frac{11}{(x+4)^2}$ d) $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$

ài 2. a) $y' = -3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2$ b) $y' = 4mx^3 + 2\left(m^2 - 9\right)x$

) $y' = \dfrac{(m-1)^2}{(x-1)^2}$ d) $y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$

ài 3. a) $y' = \dfrac{3x^2 - 4x}{2\sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}}$ b) $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

) $y' = \dfrac{1 - x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$ d) $y' = x\sqrt{x} + a$

ài 4. a) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{8x}{\left(x^2 - 4\right)^2}$

) $f'(x) = 3x^2 - 6x$ nên i) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 2 \end{array}\right.$

ii) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ nên $f(3) + (x-3)f'(3) = 2 + \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{x+5}{4}$

ài 5. a) Khi x ≠ 1, ta có $f(x) = -2 + \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} = -2 + \dfrac{|x-1|}{x-1}$ liên tục trên R \ {1}

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+}\left(-2 + \frac{x-1}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1^+}(-1) = -1 \text{ và}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-}\left(-2 - \frac{x-1}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1^-}(-3) = -3$$

Suy ra, không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại x = 1

Vậy, hàm số liên tục trên R \ { 1 }

) Khi x > 1, f(x) = – 1 nên f'(x) = 0 và Khi x < 1, f(x) = – 3 nên f'(x) = 0

Hàm số không liên tục tại x = 1 nên không có đạo hàm tại điểm đó.

Vậy, f'(x) = 0, ∀ x ≠ 1

ài 6. a) $y = 3x$; $y = -24x + 27$ b) $y = \dfrac{3}{2}$; $y = -2\sqrt{2}x + \dfrac{3}{2}$; $y = 2\sqrt{2}x + \dfrac{3}{2}$

) $y = (-2 + 2\sqrt{2})x + 1$; $y = -(2 + 2\sqrt{2})x + 1$

ài 7. a) Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm A(1 ; – 1) có hệ số góc k.

Phương trình đường thẳng (d) : y = k (x – 1) – 1.

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C) thì hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=k & (1) \\ x+\dfrac{1}{x+1}=k(x-1)-1 & (2) \end{cases}$$ có nghiệm. Thay (1) vào (2), ta có :

$$x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad ,k_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad ,k_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$k_1k_2=\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=-1$. Vậy, qua điểm A kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị (C) và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

b) Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm M(m ; 0) có hệ số góc k. Phương trình đường thẳng (d) : y = k (x – m).

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đồ thị (C) thì hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{-3}{(x-1)^2}=k & (1) \\ \dfrac{x-2}{x-1}=k(x-m) & (2) \end{cases}$$

có nghiệm. Thay (1) vào (2), ta có $x^2 + 4x - 2 - 3m = 0$ (3)

Để có hai tiếp tuyến sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía đối với trục Ox thì phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và $y(x_1).y(x_2) < 0$.

Suy ra: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1+4-2-3m \neq 0 \\ y(x_1)y(x_2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq 1 \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+m^2 < 0 \end{cases}$

Theo định lý Viet: $x_1 + x_2 = -4$ và $x_1\ x_2 = -2 - 3m$, thay vào ta có: $m^2 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

§ 3. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

Bài 1. Khi $x \neq 0$, $f(x) = x\cos\dfrac{1}{x^2}$ nên $f'(x) = \cos\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^2}\sin\dfrac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x^2}$ không tồn tại. Hàm số không có đạo hàm tại x = 0

ài 2. a) Khi $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ nên $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0$. Vậy

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & khi\ x \neq 0 \\ 0 & khi\ x = 0 \end{cases}$$

Xét $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$

* Lấy dãy (x_n), $x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0 \quad khi \quad n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\pi}\sin 2n\pi - \cos 2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty}(-1) = -1$$

* Lấy dãy (x'_n), $x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0 \quad khi \quad n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f'(x'_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{4n\pi+\pi}\right) = 0$$

Suy ra: không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ nên hàm số không liên tục tại x = 0

ài 3. a) $f'(x) = 5\cos x + 3\sin x$ b) $f'(x) = \cot x - \frac{x}{\sin^2 x}$ c)

$$f'(x) = \frac{2}{1+\sin 2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}(1 - \tan^2 x + \tan^4 x) = (1+\tan^2 x)(1 - \tan^2 x + \tan^4 x) = 1 + \tan^6 x$$

ài 4. a) $f'(x) = \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$ b) $f'(x) = \frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$

c) $f'(x) = -\sin 2x.\cos(\cos 2x)$ d) $f'(x) = \frac{3}{2}\sin 2x(2-\sin x)$

Bài 5. a) $f(x)=3\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)-2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)=1\Rightarrow f'(x)=0$

b) $f(x)=\cos^6x+2\sin^2x\cos^2x\left(\sin^2x+\cos^2x\right)+\sin^2x\cos^4x+\sin^4x$

$$=\cos^4x(\sin^2x+\cos^2x)+\sin^2x(\sin^2x+\cos^2x)+\sin^2x\cos^2x$$
$$=\cos^4x+\sin^2x+\sin^2x\cos^2x=\cos^2x(\sin^2x+\cos^2x)+\sin^2x=1$$

Suy ra: $f'(x)=0$

c) $f(x)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\frac{7\pi}{12}\right]+\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x+\frac{11\pi}{12}\right)+\cos\frac{7\pi}{12}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(2x+\frac{11\pi}{12}\right)+2\cos\frac{7\pi}{12}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)+2\cos\frac{7\pi}{12}\right]=\cos\frac{7\pi}{12}\Rightarrow f'(x)=0$$

d) $f(x)=\cos^2x+\dfrac{1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)}{2}+\dfrac{1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)}{2}$

$$=\cos^2x+1+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2x\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)\right]=\cos^2x+1+\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2x$$
$$=\cos^2x+1-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{3}{2}\Rightarrow f'(x)=0$$

Bài 6. a) $f'(x)=\cos 2x+\cos x=2\cos^2x+\cos x-1$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\cos^2x+\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\pi+k2\pi\\ \cos x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in Z\end{array}\right.$$

b) $f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ k\in Z \end{array}\right.$$

Bài 7. a) $f'(x)=\frac{1}{2}\cos^2x-\frac{(x-1)}{2}\sin 2x$

$$f(x)-(x-1)f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)}{2}\cos^2x-\frac{(x-1)}{2}\cos^2x+\frac{(x-1)^2}{2}\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2\sin 2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=k\frac{\pi}{2}\quad ,k\in Z \end{array}\right.$$

b) $f'(x)=(2m-1)\cos x+(2m+1)\sin x-\left(2m^2+\frac{3}{2}\right)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (2m-1)\cos x+(2m+1)\sin x=2m^2+\frac{3}{2} \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$(2m-1)^2+(2m+1)^2\geq\left(2m^2+\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 16m^4-8m^2+1\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (4m^2-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$$

§ 4. VI PHÂN

Bài 1. a) $df(x)=\frac{1}{(1-x)^2}dx$ b) $df(x)=2\tan x\left(1+\tan^2x\right)dx$

c) $df(x)=\frac{2x\cos x-(1-x^2)\sin x}{(1-x^2)^2}dx$ d) $df\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}dx$

e) $df(-)=-dx$

Bài 2. a) $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}=-\frac{1+\tan^2x}{1+\cot^2x}=-\tan^2x$ b) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}=-\frac{\cos x}{\sin x}=-\cot x$

Bài 3. a) 10, 955 b) 0, 485 c) 0, 983 d) 0, 707

§ 5. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Bài 1.

a) $y = \sin 5x\cos 2x = \frac{1}{2}[\sin 7x + \sin 3x] \Rightarrow y^{(n)} = \frac{1}{2}\left[7^n \sin\left(7x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3^n \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]$

b) $y = \sin^2 5x = \frac{1}{2}[1 - \cos 10x] \Rightarrow y^{(n)} = -\frac{10^n}{2}\cos\left(10x + n\frac{\pi}{2}\right), n \geq 1$ và $n \in N$

c) $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \Rightarrow y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

với $n \in N^*$

d) $y = \frac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3} = 5 + \frac{7x - 5}{x^2 - 2x - 3} = 5 + \frac{3}{x+1} + \frac{4}{x-3}$

$\Rightarrow y^{(n)} = \frac{3(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{4(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}$; $n \geq 1, n \in N$

Bài 2. a) $y'' = \frac{2x^3 + 3x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ b) $y^{(3)} = -\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}$

c) $y^{(25)} = \left[x^2 \sin x\right]^{(25)} = \sum_{k=0}^{25} C_{25}^k \left(x^2\right)^{(k)} (\sin x)^{(25-k)}$

$= C_{25}^0 (x^2)^{(0)} (\sin x)^{(25)} + C_{25}^1 (x^2)^{(1)} (\sin x)^{(24)} + \ldots + C_{25}^{25} (x^2)^{(25)} (\sin x)^{(0)}$

Ta có: $(x^2)' = 2x$; $(x^2)'' = 2$; $(x^2)^{(3)} = 0$

Suy ra:

$y^{(25)} = C_{25}^0 (x^2)^{(0)} (\sin x)^{(25)} + C_{25}^1 (x^2)^{(1)} (\sin x)^{(24)} + C_{25}^2 (x^2)^{(2)} (\sin x)^{(23)}$

$= x^2 \sin\left(x + \frac{25\pi}{2}\right) + 5x \sin(x + 12\pi) + 600x \sin\left(x + \frac{23\pi}{2}\right)$

d) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x} = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}$

Đặt $y_1 = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ và $y_2 = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ thì $y = 2y_1 - y_2$

Ta có: $y_1^{(100)} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\ldots\frac{199}{2}(1-x)^{-\frac{201}{2}} = \frac{1.3.5\ldots199}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{201}{2}}$

$y_2^{(100)} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\ldots\frac{197}{2}(1-x)^{-\frac{199}{2}} = -\frac{1.3.5\ldots197}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$

Suy ra: $y^{(100)} = \frac{1.3.5...199}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + \frac{1.3.5...197}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$

Bài 3. a) $f'(x) = 4x - 16\sin x + 2\sin 2x$; $f''(x) = 4 - 16\cos x + 4\cos 2x$

$f'(0) = 0$; $f''(\pi) = 4 - 16\cos\pi + 4\cos 2\pi = 24$

b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - 16\cos x + 4\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = 2 \text{ (loại)}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad, k \in Z$

Bài 4. a) $f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; $f''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

b) $\left(1-x^2\right)f''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$$3xf'(x) + f(x) = \frac{3x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

Suy ra: $\left(1-x^2\right)f''(x) = 3xf'(x) + f(x)$

c) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học

Bài 5. a) $y = 3 + \frac{5}{x} \Rightarrow y' = -\frac{5}{x^2}$ nên

$$xy' + y = -\frac{5x}{x^2} + 3 + \frac{5}{x} = -\frac{5}{x} + 3 + \frac{5}{x} = 3$$

b) y = xsinx nên $y' = \sin x + x\cos x$; $y'' = 2\cos x - x\sin x$

$$xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2\sin x - 2x\cos x + 2x\cos x - x^2\sin x = 0$$

c) y = xtanx nên $y' = \tan x + x(1 + \tan^2 x)$; $y'' = 2(1 + \tan^2 x)(1 + x\tan x)$

$$x^2y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 2x^2(1 + \tan^2 x)(1 + x\tan x) - 2x^2(1 + \tan^2 x)(1 + x\tan x) = 0$$

d) $y = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1 + \cos x\sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \cos x\sin x)}{1 + \cos x\sin x} = \cos x - \sin x$

$y' = -\sin x - \cos x$; $y'' = -\cos x + \sin x$. Suy ra: $y + y'' = 0$

Bài 6. Ta có: $S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$, $S''(t) = 6t - 6$ nên $a(t) = S''(t) = 6t - 6$

a) $a(3) = 12\ m/s^2$ và $a(6) = 30\ m/s^2$

b) $v(t) = S'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = -1 \text{ (loại)}\\ t = 3\end{array}\right.$ nên $a(3) = 12\ m/s^2$

c) $a(t)=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1$ nên $v(1)=-12\ m/s$

ÔN TẬP CHƯƠNG V

Bài 1. a) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x\sin 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{4x^2+8}-\sqrt{8x^2+4}}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin 2x}\left[\sqrt[3]{4x^2+8}-2+2-\sqrt{8x^2+4}\right]\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^2}{x\sin 2x\left(\sqrt[3]{(4x^2+8)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4\right)}-\frac{8x^2}{x\sin 2x\left(2+\sqrt{8x^2+4}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x}{\sin 2x\left(\sqrt[3]{(4x^2+8)^2}+2\sqrt[3]{4x^2+8}+4\right)}-\frac{8x}{\sin 2x\left(2+\sqrt{8x^2+4}\right)}\right)$$

$$=\frac{2}{12}-\frac{4}{4}=-\frac{5}{6}$$

b) Ta có: $f(x)=\left|x^2-5x+6\right|=\begin{cases}x^2-5x+6 & \text{nếu x} \le 2 \text{ hoặc x} \ge 3\\ -x^2+5x-6 & \text{nếu } 2<\text{x}<3\end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+5x-6}{x-2}=-\lim_{x\to 2^+}(x-3)=1$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x-3)=-1$$

suy ra, không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ nên hàm số không có đạo hàm tại x = 2

Bài 2. a) Khi x ≠ 0, ta có $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ nên hàm số liên tục trên R\ { 0 }

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{2}=f(0)$ nên hàm số liên tục tại x = 0

Vậy, hàm số liên tục trên R.

b) Khi x ≠ 0, ta có $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ nên $f'(x) = \dfrac{2-x-2\sqrt{1-x}}{2x^2\sqrt{1-x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2-x-2\sqrt{1-x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\left(2-x+2\sqrt{1-x}\right)} = \frac{1}{8}$$

Vậy, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2-x-2\sqrt{1-x}}{2x^2\sqrt{1-x}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{8} & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Bài 3. a) $y' = x\sqrt{x}$ b) $y' = \dfrac{16}{(x^2+16)\sqrt{x^2+16}}$

c) $y' = \dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+1)^2\sqrt{x+1}}$

d) $y' = \cot^2 x - 2x\cot x(1+\cot^2 x)$

e) $y' = \dfrac{3}{2}\cos x\sin 2x + 3\cos 2x\sin x - \sin 2x$

f) $y' = \dfrac{3\sin 6x}{2(1+\cos^2 3x)\sqrt{1+\cos^2 3x}}$

Bài 4. Hàm số có đạo hàm tại x = 1 thì hàm số liên tục tại x = 1. suy ra:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(x^2+bx+c\right) = 1+b+c \text{ và } \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{2-x^2} = 1$$

nên : b + c = 0 ⇔ c = – b

Khi đó, ta có $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{nếu } -\sqrt{2} \le x \le 1 \\ x^2+bx-b & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+bx-b-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}(x+1+b) = 2+b$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(1+x)}{(x-1)(\sqrt{2-x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{-(1+x)}{\sqrt{2-x^2}+1} = -1$$

Suy ra: 2 + b = – 1 ⇔ b = – 3 và c = 3

Bài 5. a) $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$; $f^{(3)}(\pi)=0$ và $f^{(4)}\left(\frac{\pi}{9}\right)=27$

b) $f'(x)=\frac{x\sin 2x-x^2}{(\cos x-x\sin x)^2}$ nên $f'(\pi)=-\pi$

Bài 6. Ta có : $f'(x)=-\sin x$, $f'''(x)=\sin x$

$$2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right)f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=0-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=f'''(0)-f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Bài 7. a) Hàm số liên tục tai x = 1 khi

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}\right)=-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1=f(1)=a \qquad \text{Suy ra : a = 1}$$

b) Tại điểm có tung độ bằng – 2 thì hoành độ là nghiệm của phương trình

$$\frac{3}{x^3-1}-\frac{1}{x-1}=-2\Rightarrow 2x^3-x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1 \quad (\text{ loại })\\ x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$f'(x)=-\frac{9x^2}{(x^3-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(0)=1,\ f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{3}$$

Phương trình tiếp tuyến tai điểm (0 ; – 2) là y = x – 2

Phương trình tiếp tuyến tai điểm $\left(-\frac{1}{2};-2\right)$ là $y=-\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$

Bài 8. a) $f(x)=x-\frac{1}{x}$ nên $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{x^{n+1}}$ với $n\geq 1$ và $n\in N$

b) $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)$ nên

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{4(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^{n+1}}+\frac{2^n(-1)^n n!}{(2x-1)^{n+1}}\right]=\frac{2(-1)^{n+1}n!}{(x+1)^{n+1}}+\frac{2^{n-1}(-1)^n n!}{(2x-1)^{n+1}},\ n\in N^*$$

c) $f(x)=\frac{1}{4}[\sin 4x-\sin 6x+\sin 2x]$ nên

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}\left[4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-6^n\sin\left(6x+\frac{n\pi}{2}\right)+2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\right],\ n\in N^*$$

Bài 9. a) $f'(x)=1+\tan^2 x\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$. Hệ số góc $k=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

b) Gọi điểm M (x, y) thuộc đường cong $f(x)=4x^2-6x+3$

Tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng y = 2x nên

$f'(x)=2\Leftrightarrow 8x-6=2\Leftrightarrow x=1$. Vậy, M (1, 1)

c) Gọi M (x_1, y_1) và N (x_2, y_2) thuộc đồ thị hàm số $f(x)=x-\frac{1}{x+1}$

với $x_1\neq x_2$. Tiếp tuyến tại M và tại N song song với nhau nên

$$f'(x_1)=f'(x_2)\Leftrightarrow 1+\frac{1}{(x_1+1)^2}=1+\frac{1}{(x_2+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1+1)^2=(x_2+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2\quad(\text{ loại })\\x_1+x_2=-2\end{array}\right.$$

Ta có : $x_1+x_2=-2$ và

$$y_1+y_2=x_1-\frac{1}{x_1+1}+x_2-\frac{1}{x_2+1}=x_1+x_2-\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}\right)$$

$$=x_1+x_2-\frac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)(x_2+1)}=-2$$

Vậy, trên đồ thị các cặp điểm M, N đối xứng nhau qua điểm I (– 1 ; – 1) thì tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến tại gốc tọa độ là $k=f'(0)=\frac{3}{\sqrt{3}}\cos 0=\sqrt{3}$

Góc giữa trục hoành và tiếp tuyến tại gốc tọa độ :

$\tan\varphi=f'(0)\Leftrightarrow\tan\varphi=\sqrt{3}\Leftrightarrow\varphi=60^0$ với $0^0\leq\varphi\leq 90^0$

Bài 10. a) Phương trình tiếp tuyến tại điểm (0, 2) là y = – x + 2

b) Phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng y = – x + 3 là

y = – x + 4 và y = – x + 2

c) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng y = 4x + 10 là

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{17}{4}$ và $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

d) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm A 9 2, 0) là y = – x + 2 và y = – 9x + 18

Bài 11. a) Để đồ thị tiếp xúc với đường thẳng y = 0 thì hệ phương trình sau

có nghiệm: $\begin{cases} \dfrac{x^2+4x-2m-1}{(x+2)^2}=0 \\ \dfrac{x^2-mx+1}{x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-2m-1=0 \\ x^2-mx+1=0 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ 5+2m \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5+2m \geq 0 \\ 5+2m \neq 0 \\ m^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{5}{2} \\ m > 2 \end{array} \right.$

b) Để đồ thị tiếp xúc với đường thẳng y = mx – 1 thì hệ phương trình sau

có nghiệm: $\begin{cases} 12x^2-3=m \quad (1) \\ 4x^3-3x=mx-1 \quad (2) \end{cases}$ Thay (1) vào (2) ta có :

$8x^3-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ Suy ra: m = 0

Bài 12. a) $y'=x^2-mx$, $y''=2x-m$ nên

$$xy''-y'-x^2=2x^2-mx-x^2+mx-x^2=0$$

b) Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là k = $y'(-1)=1+m$. Tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng y = 5x nên $y'(-1)=5 \Leftrightarrow 1+m=5 \Leftrightarrow m=4$

Bài 13. Ta có $S'(t)=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{3}{2}t^2+3t$, $S''(t)=t^2+3t+3$

Gia tốc của chuyển động $a(t)=S''(t)=t^2+3t+3=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0, \forall t$

Bài 14. a) $a(4)=44\ m/s^2$

b) $a(t)=S''(t)=12t-4=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$ nên $v\left(\dfrac{1}{3}\right)=S'\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\ m/s$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Đáp số:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
A	E	D	C	B	C	B	A	
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	
C	A	B	A	B	A	C	C	
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
C	B	E	B	D	A	C	C	D

1. $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x^3(x-3)}}$

2. $f'(x)=-2\cos x\sin x-\dfrac{6\tan 3x}{\cos^2 3x}=-\sin 2x-\dfrac{6\sin 3x}{\cos^3 3x}$

3. Khi x > 0 thì $f(x)=\sqrt{|x|}=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Khi x < 0 thì $f(x)=\sqrt{|x|}=\sqrt{-x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

Suy ra : $f'(x)=$(dấu của x)$\dfrac{1}{2\sqrt{|x|}}$ {Dấu + khi x > 0 và dấu – **khi x < 0**}

4. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}\Rightarrow f'(4)=\dfrac{1}{2}$

5. $f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi^2}{4}$

6. $f'(x)=x\sqrt{x}\Rightarrow f'\left(a^2\right)=a^2\sqrt{a^2}=a^2|a|=|a|^3$

7. $f'(x)=\sin x\left(1+\tan^2 x\right)\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

8. $f'(x)=\dfrac{1+\tan^2 2x}{\sqrt{\tan 2x}}\Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=2$

9. $y=f[g(x)]\Rightarrow y'=\left(f[g(x)]\right)'=f'[g(x)]g'(x)$

10. $y=g[f(x)]\Rightarrow y'=\left(g[f(x)]\right)'=g'[f(x)]f'(x)$

$$=[2(x+2)-2].1=2x+2\Rightarrow g'(1)=4$$

11. **Đặt** $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}\Rightarrow f(x)=f[g(x)]=g^2(x)+3g(x)+2$

$$f'(x)=[2g(x)+3]g'(x)=\left[2\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)+3\right]\left[\frac{-1}{(x-1)^2}\right]\Rightarrow f'(0)=-5$$

12. **Đặt** $g(x)=\sqrt{\sin 2x+1}\Rightarrow f(x)=f[g(x)]=g^3(x)+2g(x)+2$

$$f'(x)=\left[3g^2(x)+2\right]g'(x)=\left[3(\sin 2x+1)+2\right]\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x+1}}\Rightarrow f'(0)=5$$

13. $dy = f'\left[g(x)\right]g'(x)dx$

14. $dy = -\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$

15. $y = 0$; **16)** $y = 1 - \cos x$ **17)** $y^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

18. $y = \sin x\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{1}{2}.2^n \sin\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right) = 2^{n-1}\sin\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

19. $y = 2\sin 3x\cos x = \sin 4x + \sin 2x$

$\Rightarrow y^{(n)} = 4^n \sin\left(4x + n\dfrac{\pi}{2}\right) + 2^n \sin\left(2x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

20. Phương trình tiếp tuyến là $y = -x + \dfrac{5}{6}$

21. Ta có: $f'(x) = -\sin x + a$ nên để tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \cos x + ax$ không có phương song song với trục Ox thì phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm

suy ra : $-\sin x + a = 0 \Leftrightarrow \sin x = a$ vô nghiệm. Suy ra: $|a| > 1$

22. Ta có: $f'(x) = \alpha\cos\left(\alpha x + \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f'(0) = \alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Để phương trình tiếp tuyến tại điểm $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ là $g(x) = 2x + \dfrac{1}{2}$ thì

$$f'(0) = 2 \Leftrightarrow \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

23. Để hàm số có đạo hàm tại x = 0 thì giới hạn sau phải tồn tại hữu hạn

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}\right)$ Suy ra:

$\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 1$

24. Từ giải thiết ta có: $a(t) = S''(t) = 2 \quad (m/s^2)$

$v(t_0) = S'(t_0) = 3 \quad (m/s)$, $S(t_0) = 2$ nên $S(t) = t^2 + 3t + 2$

25. $a(t) = S''(t) = 6t^2 + 3 \quad \Rightarrow a(4) = 99 \quad (m/s^2)$